Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2018**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 12.07.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $u \in C^2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $B_R(x_0) \subset \Omega$, $r \in (0, R)$ und $-\Delta u \leq 0$. Wir definieren

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x \,.$$

Zeigen Sie $\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r) \geq 0$.

Hinweis 1: $\int_{B_r(x_0)} u(x)dx = \int_0^r \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) d\sigma_x ds$.

(b) Zeigen Sie: $-\Delta u \leq 0 \implies u$ subharmonisch.

(c) Es gelte $-\Delta u(x) > 0$ in $B_r(x_0)$. Zeigen Sie, dass für die Lösung v von

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{in } B_r(x_0) \\ v = u & \text{auf } \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

gilt, dass $v(x_0) < u(x_0)$.

(d) Zeigen Sie: u subharmonisch $\implies -\Delta u \leq 0$.

Hinweis 2: „Hinweis 1" und „$-\Delta u > 0 \implies u$ ist nicht subharmonisch".

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie:

(a) u ist harmonisch genau dann, wenn u subharmonisch und superharmonisch ist.

Hinweis: Aufgabe 1.

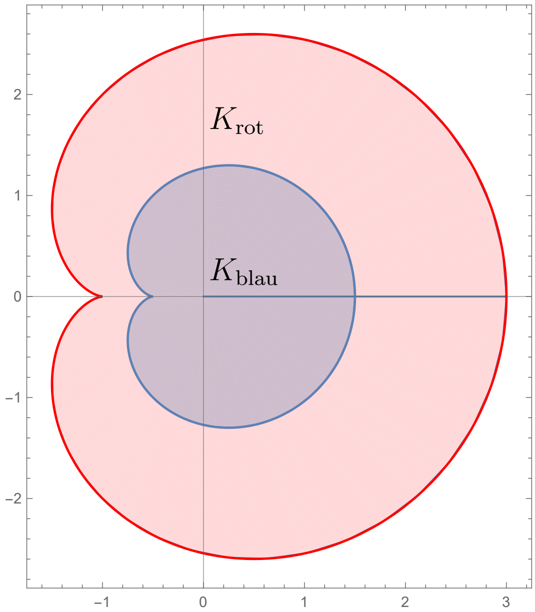
(b) Wenn u subharmonisch ist, dann gilt das starke Maximumprinzip.

(c) Wenn u superharmonisch und v subharmonisch ist, sowie $u \geq v$ auf $\partial\Omega$, dann gilt $u > v$ in Ω oder u und v sind harmonisch.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)**:** Die Abbildung

$$(x,y) \mapsto \left(x + \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), y(1+x)\right)$$

bildet die Einheitskreisscheibe auf das blaue Kardioid K_{blau} ab.



(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung konform ist.

(b) Die Greensche Funktion auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ ist durch

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln\left(1 + \frac{\left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)}{|x-y|^2}\right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } K_{\text{blau}}\,, \\ u = 0 & \text{auf } \partial K_{\text{blau}}\,. \end{cases}$$

(c) Berechnen Sie die Greensche Funktion für das rote Kardioid $K_{\text{rot}} = 2K_{\text{blau}}$.

Aufgabe 4 (9 Punkte)**:** Für $x, y \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ betrachten wir

$$G(x,y) = \frac{1}{8\pi}\left(\left|\,|y|\,x - \frac{y}{|y|}\right| - |x-y| - \frac{\left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)}{2\left|\,|y|\,x - \frac{y}{|y|}\right|}\right).$$

Zeigen Sie:

(a) $G(x,y) = G(y,x)$

(b) $\Delta_x^2\left(-\frac{1}{8\pi}|x-y|\right) = 0$ für $x \neq y$

(c) $\Delta_x^2\left(-\frac{1}{8\pi}|x-y|\right) = \delta_y(x)$ im Sinne von Distributionen

(d) $\frac{1}{\left|\,|y|x - \frac{y}{|y|}\right|}$ ist harmonisch als Funktion von x in $B_1(0)$.

(e) $\frac{\left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)}{2\left|\,|y|x - \frac{y}{|y|}\right|}$ ist biharmonisch als Funktion von x in $B_1(0)$.

(f) $\Delta_x^2\left(G(x,y)\right) = \delta_y(x)$ im Sinne von Distributionen

(g) $G(x,y) = 0$ für $|x| = 1$

(h) $\frac{\partial}{\partial n_x} G(x,y) = 0$ für $|x| = 1$

(i) G ist die Greensche Funktion von

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } B_1(0)\,, \\ u = \frac{\partial}{\partial n} u = 0 & \text{auf } \partial B_1(0)\,. \end{cases}$$