Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2018**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 26.04.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)**:** Sei $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \frac{1}{\|x\|}$ für $x \neq 0$ gegeben.

- Für $n = 1$ ist u nicht integrierbar auf $B_1(0)$,
- Für $n \geq 2$ ist u integrierbar auf $B_1(0)$, d.h. $\displaystyle\int_{B_1(0)} |u(x)|\, dx < \infty$.

Für $x \neq 0$ erhält man $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x_1} u = \frac{-x_1}{\|x\|^3}$.

(a) Für welche n ist $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ integrierbar auf $B_1(0)$, d.h. $\displaystyle\int_{B_1(0)} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) \right| dx < \infty$?

(b) Für welche n ist $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ die schwache Ableitung nach x_1 von u auf $B_1(0)$?

Hinweis: Teilen Sie dazu die Integrale über $B_1(0)$ auf in Integrale über $B_1(0) \backslash B_\varepsilon(0)$ und $B_\varepsilon(0)$. Nutzen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \backslash B_\varepsilon(0)} f(x) dx = \int_\Omega f(x) dx$$

für integrierbare Funktionen gilt.

Aufgabe 2: Sei $u(x) = \|x\|^{-a}$ und $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Für welche $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist u schwach differenzierbar auf $B_1(0)$?

Aufgabe 3: (a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \ln |x|$ auf $(-1, 1)$ keine schwache Ableitung hat.

(b) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \ln |x|$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ eine schwache Ableitung nach x_1 hat.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\sigma \in \mathbb{R}$. Welche Differentialgleichung erfüllt eine Funktion $u \in C^4(\overline{\Omega})$ mit

$$\int_\Omega (\Delta u \Delta \varphi - \sigma (u_{xx}\varphi_{yy} + u_{yy}\varphi_{xx} - 2u_{xy}\varphi_{xy}))\, d(x, y) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)?$$

Aufgabe 5: Geben Sie eine schwache und eine distributionelle Formulierung der folgenden Differentialgleichungen für u:

(a) $-\Delta u(x) = f(x)$ für $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $\cos(x)\, u''(x) = f(x)$ für $x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

(c) $\nabla \cdot \left(e^{x_1} \nabla u(x)\right) = f(x)$ für $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Lesen Sie weiter im Skript der zweiten Woche.

Aufgabe 6: Wie ist die klassische Formulierung der Differentialgleichung für u bei:

(a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\cos(x)\, u'(x)\, \varphi'(x) - f(x)\, \varphi(x)\right) dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

(b) $\displaystyle\int_{B_1(0)} \left(\left(1+|x|^2\right) \nabla u(x)\, \nabla\varphi(x) + f(x)\, \varphi(x)\right) dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$.

(c) $\displaystyle\int_{B_1(0)} \left(-\left(1+|x|^2\right) u(x)\, \Delta\varphi(x) + f(x)\, \varphi(x)\right) dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$.

Aufgabe 7 (2+3+3 Punkte)**:** Es ist bereits bekannt, dass $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{falls } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

beliebig oft differenzierbar ist. Man definiere nun für $\varepsilon > 0$ die Funktion $\Psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\Psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\tilde{x})\, d\tilde{x}\right)^{-1} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

(a) Zeigen Sie für alle $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

Sei nun $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger. Man definiere für $\varepsilon > 0$ die Funktion $u_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \Psi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

(b) Zeigen Sie, dass u_ε stetig differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\|u_\varepsilon - u\|_\infty \to 0$ für $\varepsilon \downarrow 0$.