Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2018**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 03.05.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4+2 Punkte)**:** Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $J(u) := \int_{B_1(0)} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u(x)\|^2 + n^2(1-u(x)^2)^2 \right) dx$.

(a) Wenn $u \in C^2(\overline{B_1(0)}) \cap C_0(\overline{B_1(0)})$ das Funktional minimiert, welches Randwertproblem löst u?

(b) Zeigen Sie, dass $u = 0$ eine Lösung dieses Randwertproblems im oben genannten Raum ist, aber nicht das Funktional minimiert. *Hinweis: Betrachten Sie* $u(x) = 1 - \|x\|^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**:** Sei $T \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) - k\Delta T(x,t) = cT(x,t) & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ T(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ T(x,0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega \end{cases}$$

Sei $E(t) = \int_\Omega T(x,t)^2 dx$. Zeigen Sie, dass dann $E(t) \leq E(0)\exp(2ct)$ gilt.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**:** Auf

$$\Omega := \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,; 0 < r < 1 \text{ und } 0 \leq |\varphi| < \tfrac{3}{4}\pi \right\}$$

sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ durch Polarkoordinaten folgendermaßen definiert:

$$U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := u(r,\varphi) := \left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}} \right) \sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi + \frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

(a) Zeigen Sie, dass U in Ω die Differentialgleichung $-\Delta U = 0$ erfüllt:

(b) Zeigen Sie folgendes Randverhalten:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\uparrow 1} u(r,\varphi) = 0 && \text{für } \varphi \in \left(-\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi\right) \\ &\lim_{\varphi\downarrow -\frac{3}{4}\pi} u(r,\varphi) = \lim_{\varphi\uparrow\frac{3}{4}\pi} u(r,\varphi) = 0 && \text{für } r \in (0,1) \end{aligned}$$

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass harmonische Funktionen eine Mittelwerteigenschaft besitzen. Daraus folgt, dass eine nicht-konstante harmonische Funktion ihre Extrema nur auf dem Rand des Gebietes annehmen kann. Wie verhält sich dies mit U?

Aufgabe 4 (2+1 Punkte): (a) Zeigen Sie, dass $v(t,x) = t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$ eine Lösung ist von

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) v = 0.$$

(b) Zeigen Sie Sie $\lim_{t \downarrow 0} v(t,x) = 0$ für $\|x\| \neq 0$.

Aufgabe 5: Die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche ist

$$\nabla . \left(\frac{\nabla u\,(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla u\,(x.y)|^2}} \right) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:

$$\partial_r \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r\,(r)|^2}} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r\,(r)|^2}} \right) = 0.$$

(b) Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine radialsymmetrische Lösung für

$$\begin{cases} \nabla . \left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x.y)|^2}} \right) = 0 & \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u\,(x,y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u\,(x,y) = h & \text{für } x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

(c) Welchen Wert darf h maximal annehmen, damit eine radialsymmetrische Lösung $(x,y) \mapsto u\,(x,y)$ existiert?

Aufgabe 6: (a) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite $u_{tt} - c u_{xx} = 0$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0,t) = u(l,t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,.$$

Diese Lösungen nennt man Eigenschwingungen. Berechnen Sie alle solche Lösungen. Diese Lösungen sind periodisch in der Zeit. Welche Perioden treten auf?

(b) Auch die Differentialgleichung des schwingenden Balkens $u_{tt} - \sigma u_{xxxx} = 0$ mit $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und mit Randwertbedingungen $u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0$ hat Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,.$$

Berechnen Sie auch hier alle solche Lösungen. Welche Perioden treten hier auf?

(c) Beide Probleme haben in Wirklichkeit einen Reibungsterm:

$$u_{tt} + c u_{xx} + \varepsilon u_t = 0 \qquad \text{und} \qquad u_{tt} + \sigma u_{xxxx} + \varepsilon u_t = 0.$$

Berechnen Sie auch hier die Lösungen der Form $X(x)T(t)$.