Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

SoSe 2018

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Mittwoch, den 09.05.2018, um 15 Uhr.

Aufgabe 1 (4+0 Punkte)**:** Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Randwertprobleme

(a) $\begin{cases} u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = x^2, \\ u(1,y) = y \text{ für } y \in \mathbb{R}; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = 1, \\ u(x,y) = y \text{ für } x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

auf einem größtmöglichen Gebiet.

Aufgabe 2: Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= -u \text{ für } x, y > 0, \\ u(x,0) &= 0 \text{ für } x > 0, \\ u(0,y) &= 1 \text{ für } y \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Charakteristiken.

(b) Berechnen Sie die Lösung entlang der Charakteristiken.

(c) Ist dies eine C^1-Lösung auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)**:** Sei $p \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$xu_x + yu_y = pu \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die charakteristischen Kurven.

(b) Sei nun $p = 4$. Berechnen Sie explizit eine Lösung, für die $u(x,y) = 1$ auf dem Kreis $\{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 = 1\}$ gilt.

(c) Finden Sie für $p = 2$ zwei Lösungen, für die $u(x,0) = x^2$ für $x > 0$ gilt. Warum gibt es hier keine eindeutige Lösung?

Aufgabe 4: Lösen Sie die Gleichung

$$uu_x + u_y = 1$$

unter der Bedingung, dass $u(x,x) = \frac{1}{2}x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5 (1+2+2 Punkte)**:** Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_x - x u_y = xu \\ u(x, -x^2) = 1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

(a) Gilt die Transversalitätsbedingung?

(b) Skizzieren Sie die Kurve, auf der die Randbedingungen festgelegt sind, und die charakteristischen Kurven.

(c) Finden Sie eine Lösung $(x, y) \mapsto u(x, y)$. Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist diese Lösung definiert?

Aufgabe 6 (2+4 Punkte)**:** Wir betrachten die physikalisch relevante Lösung (Def. 4.15) zu

$$\begin{cases} u_t + (\sin(u))_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\,, \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}\,. \end{cases}$$

Dabei ist g wie folgt definiert:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } x < -1 \\ \pi & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie im Bild die charakteristischen Kurven und markieren Sie Stoßwellen.

(b) Geben Sie auf den verschiedenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ wie im Bild die jeweiligen Vorschriften der Lösung an.