Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

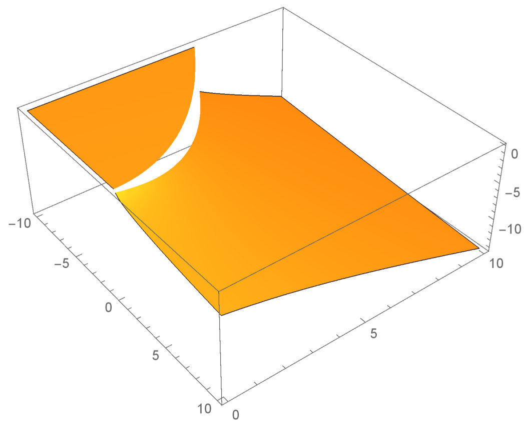
SoSe 2018

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 17.05.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte)**:** Die Funktion



$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\left(t + \sqrt{3x + t^2}\right) & \text{, falls } 4x + t^2 > 0 \\ 0 & \text{, falls } 4x + t^2 < 0 \end{cases}$$

ist unstetig entlang der Kurve $S = \left\{ \left(-\frac{t^2}{4}, t \right) \; ; \; t \in \mathbb{R}^+ \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass u die Burgers-Gleichung $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$ in $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \setminus S$ löst.

(b) Erfüllt u die Rankine-Hugoniot-Bedingung?

(c) Ist u eine schwache Lösung? D.h. erfüllt u für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \left(u\varphi_t + \frac{1}{2}u^2\varphi_x \right) d(x,t) = 0 \qquad ?$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**:**

(a) Wir betrachten $L = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^3$. Zeigen Sie, dass es einen Differentialoperator L_1 von erster Ordnung und einen Differentialoperator L_2 von zweiter Ordnung gibt, sodass $L = L_1 L_2$ gilt.

Ist L_2 elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder noch anders?

(b) Kann man auch $L = \sum\limits_{\alpha_1+\alpha_2=3} a_{\alpha_1,\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha_2}$ mit $a_{3,0}a_{0,3} \neq 0$ so zerlegen?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) - u_{xy}(x,y) - 2u_{yy}(x,y) = (y^2 - 2y - 4)e^x & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } y > 0\,, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\,, \\ u_y(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie eine Lösung für

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin(x+2t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 5 (3+4+0 Punkte)**:** Sei $\Omega = (0,\pi) \times (0,T)$ und betrachten Sie die Probleme

(a) $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxxx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

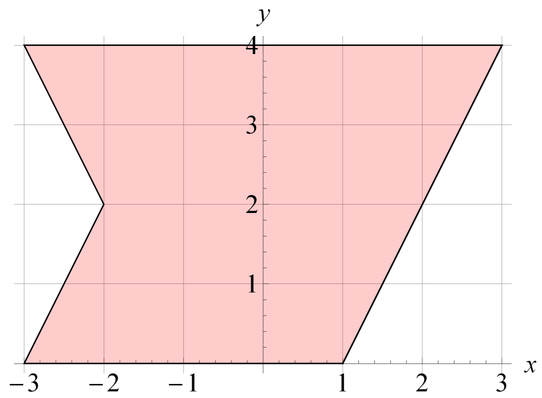
(c) $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxxx} = 0 \\ u(x,0) = x \sin x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie jeweils eine Lösung und prüfen Sie, ob die Lösung eindeutig ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**:** Sei u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Gleichung

$$4u_{xx} - u_{yy} = 1$$

auf dem dargestellten Gebiet. Legen Sie Randbedingungen und Ränder derart fest, dass das Problem eine eindeutige Lösung hat.



Aufgabe 7: Sei $n > 2$. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

die folgende Eigenschaft hat: Für $x \in B_1(0)$ gilt

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x,y) f(y) dy - \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) \varphi(y) d\sigma_y$$

mit $\omega_n = \int_{B_1(0)} 1 dy$ und

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)n\omega_n} \left(\left\| x \|y\| - \tfrac{y}{\|y\|} \right\|^{2-n} - \|x-y\|^{2-n} \right).$$