Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2018**
Jan Gerdung, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Mittwoch, den 30.05.2018, um 15 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass man jede Gleichung

$$\left(a\partial_x^2 + 2b\partial_x\partial_y + c\partial_y^2\right) u = f$$

mit $ac > b^2$ mittels einer Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{mit } M \in GL(2)\,,$$

auf die Form $\Delta U = F$ bringen kann.

Hinweis: Man benutzt, dass man die Koeffizientenmatrix auf Diagonalform bringen kann und skaliert dann die Eigenwerte auf 1.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**:** Bestimmen Sie die Bereiche, wo die Differentialgleichung

$$\left(1 - x^2\right) u_{xx} + 2xyu_{xy} + \left(1 - y^2\right) u_{yy} = f$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie, welche Bedigung ∇u erfüllen muss, damit die Differentialgleichung

$$\left(1 - u_x^2\right) u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + \left(1 - u_y^2\right) u_{yy} = f$$

elliptisch ist.

Aufgabe 4: Wir betrachten den Differentialoperator

$$L = \partial_x^2 + 2t\partial_x\partial_y + \partial_y^2 = \nabla \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} \nabla$$

in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$.

(a) Klassifizieren Sie L in Abhängigkeit von t durch Verwendung der Zerlegung

$$\tau^2 + 2t\tau + 1 = \begin{cases} \left(\tau + t - \sqrt{t^2 - 1}\right)\left(\tau + t + \sqrt{t^2 - 1}\right) & \text{für } |t| > 1, \\ \left(\tau + t - i\sqrt{1 - t^2}\right)\left(\tau + t + i\sqrt{1 - t^2}\right) & \text{für } |t| < 1. \end{cases}$$

(b) Klassifizieren Sie L in Abhängigkeit von t durch Verwendung der Eigenwerte

$$\lambda_\pm = 1 \pm t \qquad \text{von} \qquad \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (2+2+1+2 Punkte)**:** Auch partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung können klassifiziert werden. Wir betrachten

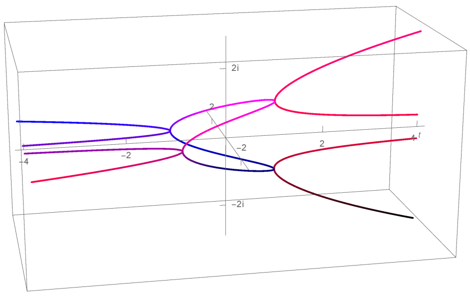
$$L = \partial_x^4 + 2t\partial_x^2\partial_y^2 + \partial_y^4$$

in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie, dass man entlang der charakteristischen Kurven eine Lösung konstruieren kann, wenn das Polynom

$$p(\tau) := \tau^4 + 2t\tau^2 + 1$$

vier reelle Nullstellen hat.



(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist dies der Fall?

(c) Wenn keine der Nullstellen von p reell ist, heißt L elliptisch. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist dies der Fall?

(d) Geben Sie Vorschriften für stetige Funktionen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für die 4 Nullstellen von p in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Kombinieren Sie:

$$\begin{array}{ccc}
\sqrt{-t+\sqrt{t^2-1}} & \exp\left(\frac{i}{2}\arccos(-t)\right) & i\sqrt{t-\sqrt{t^2-1}} \\
-\sqrt{-t+\sqrt{t^2-1}} & -\exp\left(\frac{i}{2}\arccos(-t)\right) & -i\sqrt{t-\sqrt{t^2-1}} \\
\sqrt{-t-\sqrt{t^2-1}} & \exp\left(-\frac{i}{2}\arccos(-t)\right) & i\sqrt{t+\sqrt{t^2-1}} \\
-\sqrt{-t-\sqrt{t^2-1}} & -\exp\left(-\frac{i}{2}\arccos(-t)\right) & -i\sqrt{t+\sqrt{t^2-1}}
\end{array}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)**:** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in (0,L) \text{ und } t > 0\,, \\
u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,L)\,, \\
u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in (0,L)\,, \\
u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{für } t > 0\,.
\end{cases} \tag{1}$$

Für die ungeraden und $2L$-periodisch fortgesetzten Anfangsfunktionen u_0 und v_0 erhält man die folgende Darstellung durch Fourier-Reihen:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \qquad \text{mit } a_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi)\sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right)d\xi\,,$$

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \qquad \text{mit } b_k = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(\xi)\sin\left(\frac{k\pi}{L}\xi\right)d\xi\,,$$

Wir nehmen an, dass die beiden Reihen in $C^2[0,L]$ konvergieren. Zeigen Sie, dass die C^2-Lösung von (1) durch

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k L}{k\pi c}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}ct\right)$$

gegeben ist.