Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2018**
Jan Gerdung, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 07.06.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**:** Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

(a) Berechnen Sie $-v'' + v$ als Distribution, d.h. $-F_v'' + F_v$.

(b) Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)\varphi(y)dy \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})?$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktionen

$$u_1(x,t) = \max\left(t^2 - x^2, 0\right) \text{ und } u_2(x,t) = \max\left(t - |x|, 0\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Anfangsbedingungen erfüllt sind:

$$u_1(x,0) = 0 \qquad u_2(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1(x,0) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}u_2(x,0) = \chi_{\{0\}}$$

(b) Ist u_1 bzw. u_2 eine distributionelle Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$?

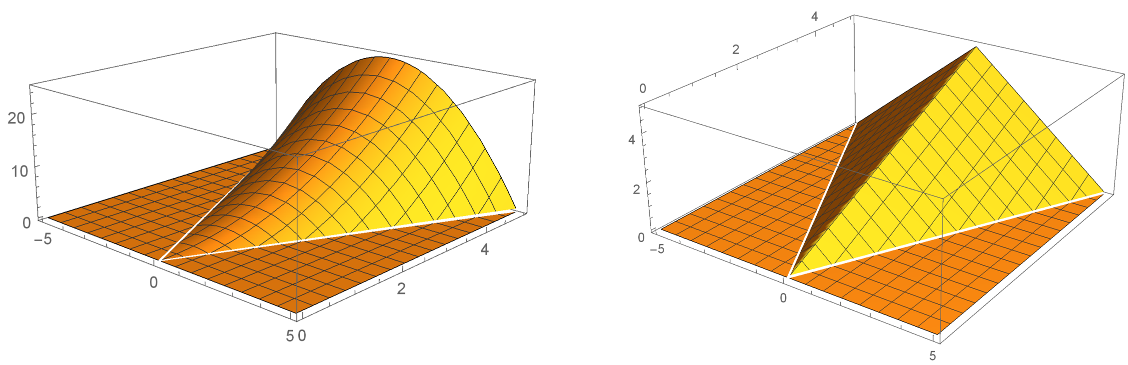

Abbildung 1: Skizze der beiden Funktionen

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**:** (a) Ist $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\delta_k$ für $c_k \in \mathbb{R}$ und den Dirac-δ-Funktionen δ_k an der Stelle k eine Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$?

(b) Welche Bedingung an die c_k garantiert, dass $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\delta_k$ eine Distribution in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ ist?

Aufgabe 4 (3 Punkte)**:** Finden Sie eine Funktion $f \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^2)$ derart, dass

$$F_f(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(x)dx$$

so ist, dass im Sinne von Distributionen gilt: $-\Delta F_f = \delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 5: Die Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt eine Cauchy-Folge in $\mathscr{D}$, wenn

- Es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt derart, dass $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und
- Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $N > 0$ derart, dass für $n, m > N$ gilt $\|D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi_m\|_\infty < \varepsilon$.

Beweisen oder widerlegen Sie: Jede Cauchy-Folge in $\mathscr{D}$ konvergiert in $\mathscr{D}$.

Aufgabe 6 (0+2+2+0+4 Punkte)**:** Die Faltung zweier Funktionen f, g wird durch

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)dx$$

definiert. Mit $\tau_y : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\tau_y\varphi(x) = \varphi(y-x)$, können wir diese Definition für Distributionen erweitern: Für $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir:

$$(T * \varphi)(y) := T(\tau_y\varphi)\,.$$

(a) Zeigen Sie $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Zeigen Sie $D^\alpha(T * \varphi) = T * (D^\alpha\varphi) = (D^\alpha T) * \varphi$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

(c) Zeigen Sie $\mathrm{supp}(T*\varphi) \subset \mathrm{supp}(T)+\mathrm{supp}(\varphi)$. Dabei sei $\mathrm{supp}(T)$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, sodass $T(\psi) = 0$ für alle $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(\psi) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}(T))$.

(d) Zeigen Sie $(T * \psi) * \varphi = T * (\psi * \varphi)$ für alle $\psi, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

(e) Zeigen Sie $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_{T*\psi_\varepsilon}(\varphi) = T(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Dabei ist ψ_ε wie in Formel (7.5) des Skriptes für $\|x\| < \varepsilon$ wie folgt definiert:

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(y)dy} \qquad \text{wobei} \quad \varphi_\varepsilon(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-\varepsilon^2}} & \text{falls } \|x\| < \varepsilon\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\psi_\varepsilon * \varphi \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \varphi$ *in* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.