Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2018**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 14.06.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**:** Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\,, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Unten sehen Sie die Lösungen zu den Anfangsbedingungen

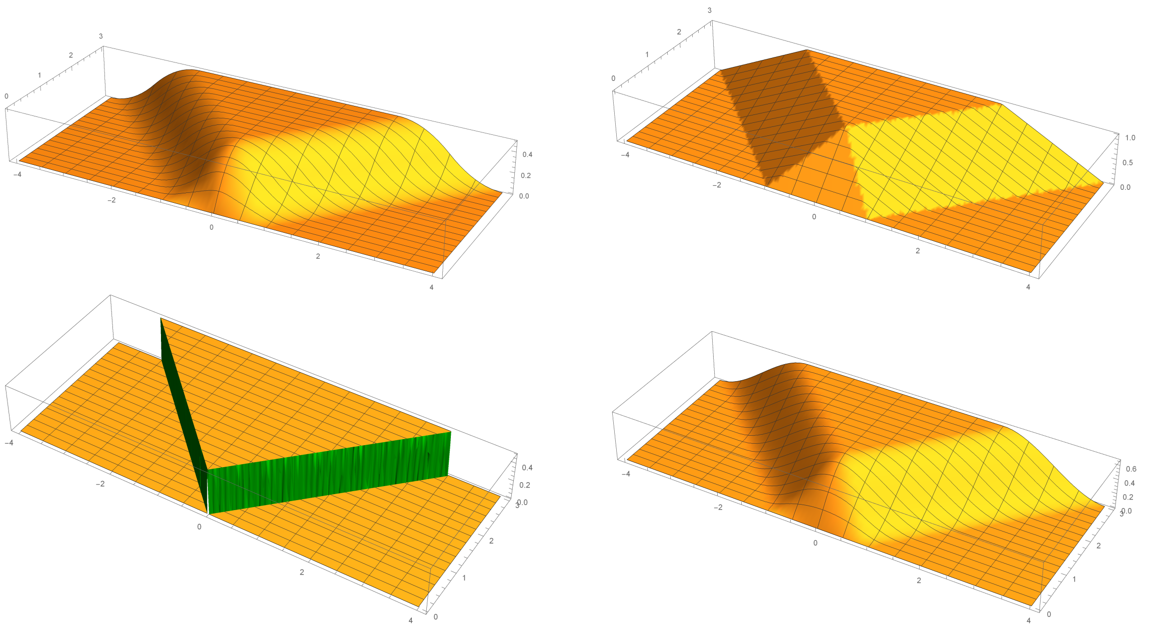
(a) $v_0 = \delta_0$,

(b) $v_0(x) = \max\{1 - x^2, 0\}$,

(c) $v_0(x) = \max\{1 - |x|\,, 0\}$,

(d) $v_0 = \chi_{[-1,1]}$.

Ordnen Sie die jeweilige Anfangsbedingung einem der Bild zu.



Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**:** Wir nehmen $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sei u die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t\,(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die kinetische Energie, beziehungsweise die potentielle Energie, am Zeitpunkt t ist definiert durch

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}\left(u_t(x,t)^2\right) dx \text{ und } P(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}\left(u_x(x,t)^2\right) dx.$$

Zeigen Sie:

(a) $K(t) + P(t)$ ist konstant.

Hinweis: betrachte $\frac{\partial}{\partial t}\left(K(t) + P(t)\right)$.

(b) Es gibt $t_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $K(t) = P(t)$ für alle $t \geq t_0$.

Hinweis: Wenn $\operatorname{supp}(u_0) \cup \operatorname{supp}(v_0) \subset [-a,a]$ *liegt, dann gilt* $K(t) = P(t)$ *für* $t > a$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass für $u_0, v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

die folgende Abschätzung erfüllt:

$$|u(x,t)| \leq \frac{C(u_0,v_0)}{t} \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+.$$

Aufgabe 4 (3+2+1+2)**:** Sei $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine klassische Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u - c^2 \Delta u = f & \text{für } \|x\| < t+1, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } \|x\| < 1, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } \|x\| < 1, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } \|x\| = t+1. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Wir setzen

$$E(t) := \int_{\|x\|<t+1} \left(u_t^2(x,t) + c^2 \left|\nabla u(x,t)\right|^2\right) dx.$$

Zeigen Sie, dass im Fall $f = 0$ folgendes gilt:

$$E'(t) = \left(1 - c^2\right) \int_{\|x\|=t+1} u_t(x,t)^2 \, d\sigma_x.$$

(b) Zeigen Sie, dass (1) für $c > 1$ höchstens eine klassische Lösung hat.

(c) Geben Sie eine zusätzliche Randbedingung an, so dass man auch für $c < 1$ höchstens eine Lösung findet.

(d) Erklären Sie anhand der Ausbreitungskegel den Unterschied zwischen $c > 1$ und $c < 1$.