Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2018**
Jan Gerdung, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 21.06.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Ein schwingender Balken, der an seinen Enden eingeklemmt ist, kann man beschreiben durch das folgende Randwertproblem mit $d, \ell > 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} + d^2 u_{xxxx} = 0 & \text{auf } (0,\ell) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0,\ell], \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0,\ell], \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem in $C^4([0,\ell] \times [0,\infty))$ höchstens eine Lösung hat.

Hinweis: Betrachten Sie $E(t) = \displaystyle\int_0^l \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} d^2 u_{xx}^2 \, dx.$

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)**:** Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 & \text{auf } (0,\ell) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0,\ell], \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0,\ell], \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für eine Lösung $u \in C^2([0,\ell] \times [0,\infty))$ gilt:

$$\partial_t \int_{(0,\ell)} \left(u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2 \right) dx \le 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem in $C^2([0,\ell] \times [0,\infty))$ höchstens eine Lösung hat.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand. Für eine Lösung u des Anfangs-/ Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = g_A & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \\ u = g_R & \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{2}$$

definieren wir die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2(x,t) \, dx.$$

(a) Seien $f = 0$ und $g_R = 0$. Zeigen Sie, dass $t \mapsto E(t)$ dann fallend ist. Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?

(b) Folgern Sie daraus, dass das Anfangs-/ Randwertproblem (2) höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ haben kann.

Aufgabe 4: Finden Sie alle nichtnegativen klassischen Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in (0,\ell), t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

die die Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ haben.

Aufgabe 5: Leiten Sie eine explizite Formel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

her, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.
Hinweis: Versuchen Sie es mit $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$.

Aufgabe 6 (2+2+1 Punkte)**:** Betrachte $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ definiert durch

$$u(x,t) = \sqrt{\pi} \int_{\frac{x-1}{\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{t}}} e^{-\xi^2/4} d\xi.$$

(a) Zeigen Sie, dass für diese Funktion $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$ gilt.

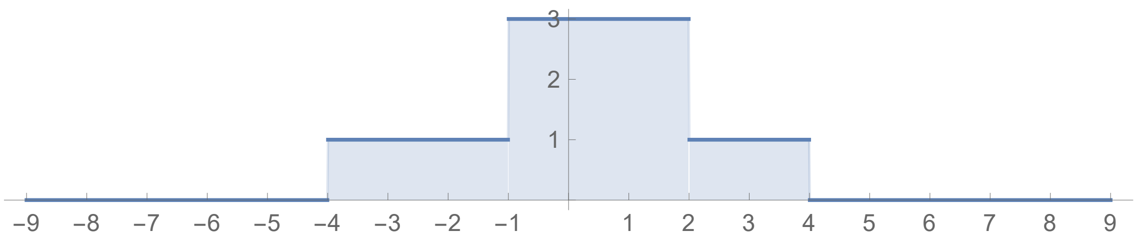
(b) Die Anfangsbedingung ist

$$u_0(x) = \lim_{t \downarrow 0} u(x,t).$$

Berechnen Sie u_0.

(c) Berechnen Sie eine ähnliche Lösungsformel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = \mathbb{1}_{[-4,4]}(x) + 2\, \mathbb{1}_{[-1,2]}(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Aufgabe 7 (2+1+2 Punkte)**:** Wir betrachen $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$ gilt.

(b) Welche Anfangsbedingung erfüllt u für $x \neq 0$?

(c) Berechnen Sie die Distribution $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, definiert für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ durch

$$F(\varphi) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, \varphi(x)\, dx.$$