1. Die Funktionen a und b seien dreimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$.

   (a) Für welches Anfangswertproblem ist

   $$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} a(y)d\sigma_y + \partial_t\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} b(y)d\sigma_y\right)$$

   eine Lösung?

   (b) Zeigen Sie, dass man diese Lösung auch wie folgt schreiben kann:

   $$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\int_{|y-x|=ct} \left(t\ a(y) + b(y) + \nabla b(y)\cdot(y-x)\right)d\sigma_y.$$

2. Berechnen Sie die Lösung von

   $$\partial_t u + \partial_x\left(\tfrac{1}{2}u^2\right) = 0 \quad \text{auf } \left\{(x,t); x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}^+\right\},$$
   $$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x<-1, \\ -x & \text{für } x\in[-1,0], \\ 0 & \text{für } x>0, \end{cases}$$

   die die Entropie- und die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Eine ausführliche Skizze der charakteristischen Kurven mit den zugehörigen Funktionswerten genügt.

3. Finden Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für v derart, dass $u(x,y) = v\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ eine Lösung ist von

   $$\nabla\cdot\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0.$$

4. Betrachte für $a\in\mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

   $$u_{xx} + a\ u_{xy} + 4u_{yy} = f. \tag{1}$$

   (a) Für welche a ist diese Differentialgleichung elliptisch, hyperbolisch beziehungsweise parabolisch?

   (b) Sei nun

   $$\Omega = \left\{(x,y);\ |x|<1 \text{ und } |y|<1\right\}.$$

   Wählen Sie ein a und geben Sie Randwerte auf $\partial\Omega$ oder einem Teil von $\partial\Omega$ an, so dass (1) zusammen mit diesen Randwerten ein wohlgestelltes Problem im Sinne von Hadamard ergibt. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu beweisen.

   (c) Wann ist ein Randwertproblem wohlgestellt im Sinne von Hadamard?

5. Ein Mittelwertsatz ist eine Aussage folgender Art:

   Für alle $x_0 \in \Omega$ gibt es ein $U_{x_0} \subset \Omega$ mit $x_0 \in \overline{U_{x_0}}$, so dass $u(x_0) = ⨍_{U_{x_0}} u(y)\, d\mu_y$ gilt für alle $u \in A$.[1]

   (a) Für welche der folgenden Funktionenmengen gilt eine derartige Aussage?

      i. $A = \{u \in C^2(\mathbb{R}^2);\ u_{xy}(x,y) = 0\}$,

      ii. $A = \{u \in C^2(\mathbb{R}^2);\ u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0\}$,

      iii. $A = \{u \in C^2(\mathbb{R}^2);\ u_x(x,y) = u_{yy}(x,y)\}$.

   (b) Formulieren Sie zu einer der oben angegebenen Funktionenmengen die passende Version des Mittelwertsatzes.

   (c) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Mittelwertsatz und Maximum-Prinzip.

6. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $F(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $(-\partial_x^2 + 1)\,F = \delta$ gilt im Sinne von Distributionen.

   (b) Sei $f \in C_0(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die durch

   $$u(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-y)\, f(y)dy$$

   definierte Funktion eine Lösung ist von

   $$\begin{cases} (-\partial_x^2 + 1)\, u = f \text{ in } \mathbb{R}, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

7. Sei $u \in C(\overline{B_1(0)})$ für $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

   (a) $u(0) = \dfrac{1}{\omega_n r^{n-1}} \displaystyle\int_{|y|=r} u(y)d\sigma_y$ für alle $r \in (0,1]$.

   (b) $u(0) = \dfrac{n}{\omega_n r^n} \displaystyle\int_{|y|<r} u(y)dy$ für alle $r \in (0,1]$.

8. Zeigen Sie, dass das folgende Problem höchstens eine Lösung haben kann.

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,1), \\ u_x(x,t) = 0 & \text{für } x \in \{0,1\}\,, t > 0, \\ u \in C^2([0,1] \times [0,\infty)). \end{cases}$$

---

[1] Man setzt $⨍_{U_{x_0}} u(y)\, d\mu_y := \dfrac{\displaystyle\int_{U_{x_0}} u(y)\, d\mu_y}{\displaystyle\int_{U_{x_0}} 1\, d\mu_y}$.