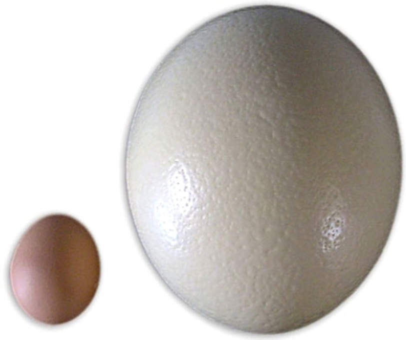
Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2011

Partielle Differentialgleichungen
Aufgaben der Klausur vom 19.7.2011

1. Wenn die Temperatur von Proteinen die 50°–Celsius–Schwelle überschreitet, ändert sich die Form des Moleküls. Unterhalb ist das Kettenmolekül aufgerollt, und oberhalb streckt es sich. Wenn diese Kettenmoleküle sehr eng zusammen sind, wird beim Wiederabkühlen das Aufrollen verhindert. Dieses Verhalten sorgt dafür, dass ein rohes Ei oberhalb von 50° Celsius eine feste Form annimmt, die anschließend auch beim Abkühlen erhalten bleibt. Wenn wir ein Ei hartgekocht nennen, hat dieses Ei überall im Innern die 50°–Celsius–Schwelle überschritten.



Ei, Ei.

   Eine rohes Hühnerei von 5 cm Länge braucht bei 20° Celsius Zimmertemperatur 8 Minuten in kochendem Wasser, um ein hartgekochtes Ei zu werden. Ein Straußenei habe das 24– fache Volumen dieses Hühnereis, ansonsten aber die gleiche Form. Wie lange braucht das Straußenei (ausgehend von 20° Celsius Zimmertemperatur), um in einem Eimer kochenden Wassers zu einem hartgekochten Straußenei zu werden?

   Der Temperaturverlauf im Straußenei und im Hühnerei unterliegen der Wärmeleitungsgleichung mit gleichen Konstanten.

2. Die Funktionen u_0 und v_0 seien in $C^3\left(\mathbb{R}^3\right)$.

   (a) Für welches Anfangswertproblem ist

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} v_0(y)d\sigma_y + \partial_t\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} u_0(y)d\sigma_y\right)$$

   eine Lösung?

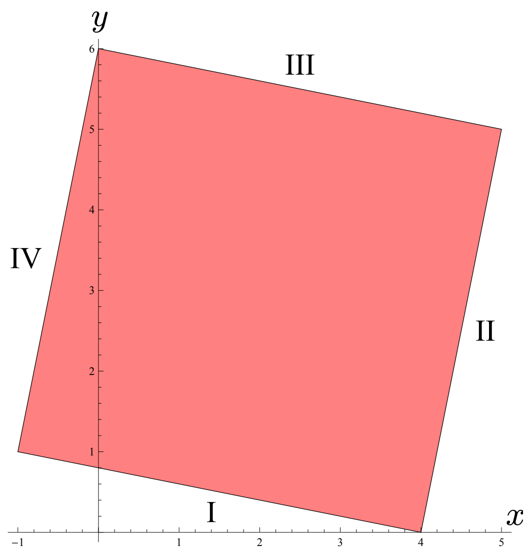
   (b) Zeigen Sie, dass man u auch wie folgt schreiben kann:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\int_{|y-x|=ct} \left(tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y)\cdot(y-x)\right)d\sigma_y.$$

3. Ω sei das offene Quadrat in $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $(4,0)$, $(5,5)$, $(0,6)$ und $(-1,1)$. Die vier Seiten seien nummeriert wie im Bild. Entfernen Sie eine Randbedingung so, dass

$$\begin{cases} u_x(x,y) - u_y(x,y) = \sin\left(e^{-x^2y^2}\right) \text{ in } \Omega \\ u(x,y) = x \text{ auf } I \\ u(x,y) = y \text{ auf } II \\ u(x,y) = -y \text{ auf } IV \end{cases}$$

   genau eine Lösung hat. Begründen Sie Ihre Wahl.



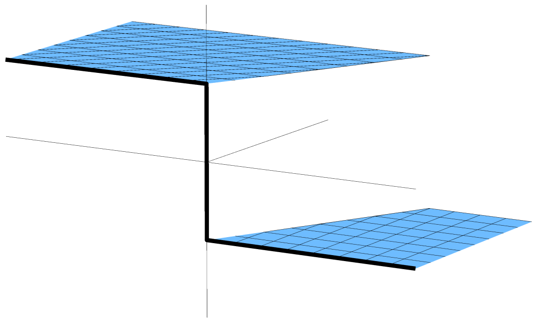
4. Gesucht ist die Lösung zu

$$\partial_y u + \partial_x \left(u^2\right) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, y > 0,$$

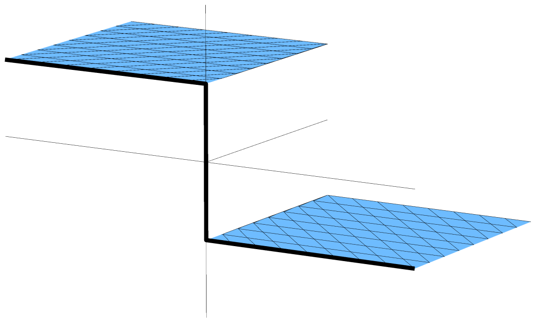
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ -1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

die die Entropie- und Rankine–Hugoniot–Bedingung erfüllt. Welche ist die richtige? Begründen Sie Ihre Wahl.

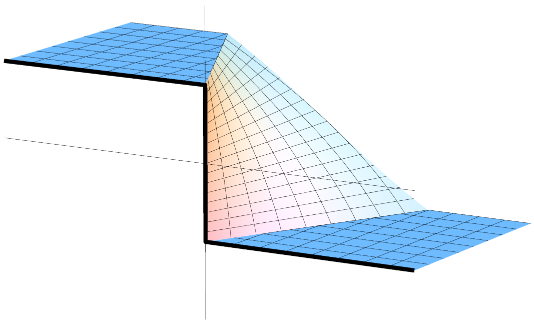
a) $u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{1}{2}y, \\ -1 & \text{für } x > \frac{1}{2}y. \end{cases}$



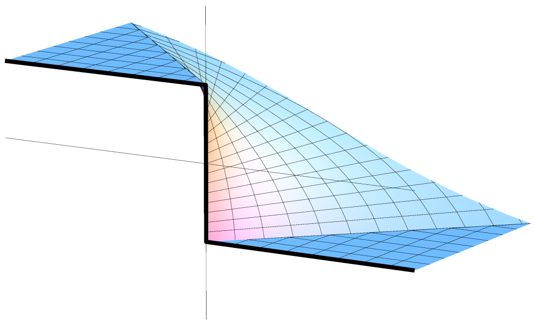
b) $u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ -1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$



c) $u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -\frac{1}{2}y, \\ -2\frac{x}{y} & \text{für } -\frac{1}{2}y < x < \frac{1}{2}y, \\ -1 & \text{für } x > \frac{1}{2}y. \end{cases}$



d) $u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -y, \\ -\frac{x}{y} & \text{für } -y < x < y, \\ -1 & \text{für } x > y. \end{cases}$

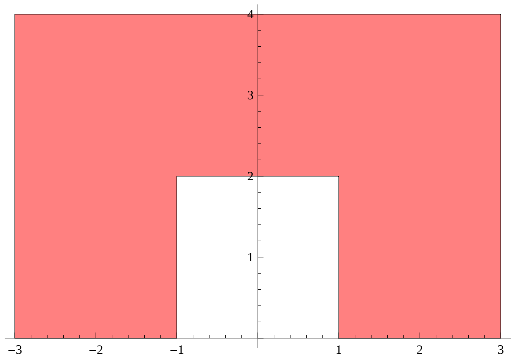


5. Für welche (verallgemeinerten) Funktionen a und b ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(t) = e^{-|t|}$ eine distributionelle Lösung der folgenden Gleichung?

$$y'' - a\, y = b.$$

6. Man betrachte für das Polygon $R = ((-3,3) \times (0,4)) \setminus ([-1,1] \times [0,2])$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_y(x,y) - u_{xx}(x,y) = 0 \text{ in } R, \\ u(x,y) = x \text{ für } (x,y) \in \partial R \text{ mit } x > 0 \text{ und } y < 4, \\ u(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) \in \partial R \text{ mit } x \leq 0 \text{ und } y < 4. \end{cases}$$



Sei u eine klassische Lösung dieses Problems.

(a) Berechnen Sie $\max\left\{u(x,y);(x,y) \in \bar{R}\right\}$.

(b) Für welche $(x,y) \in \bar{R}$ gilt $u(x,y) = 0$?

7. Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$, und sei $u \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie folgendes:

(a) $\Delta u \geq 0$ in $\Omega \Rightarrow u$ subharmonisch in Ω;

(b) u harmonisch in $\Omega \Rightarrow u^2$ subharmonisch in Ω.

Hinweis: Für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ gilt für $x \in B_R(x_0)$

$$u(x) = \int_{B_R(x_0)} G_{B_R(x_0)}(x,y)\,(-\Delta u(y))\,dy + \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{-\partial G_{B_R(x_0)}(x,y)}{\partial \nu_y} u(y)\,d\sigma_y,$$

wobei $G_{B_R(x_0)}(.,.)$ die Greensche Funktion zu $-\Delta$ für die Kugel $B_R(x_0)$ bezeichnet. Mit

$$G_{B_R(x_0)}(x,y) = \frac{1}{\omega_n(n-2)}\left(|x-y|^{2-n} - \left|\frac{|y-x_0|}{R}(x-x_0) - \frac{R}{|y-x_0|}(y-x_0)\right|^{2-n}\right)$$

für $x, y \in B_R(x_0)$ und

$$\frac{-\partial G_{B_R(x_0)}(x,y)}{\partial \nu_y} = \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{R\omega_n |x-y|^n}$$

für $x \in B_R(x_0)$, $y \in \partial B_R(x_0)$ folgt für $x = x_0$ also

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \int_{B_R(x_0)} \left(|x_0 - y|^{2-n} - R^{2-n}\right)(-\Delta u(y))\,dy + \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\,d\sigma_y.$$

8. Berechnen Sie eine Lösung zu

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 1 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \frac{2}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}, \\ u_y(x,0) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hinweis: Die Funktion $\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2}x^2$ löst die Differentialgleichung, nicht jedoch das Randwertproblem.