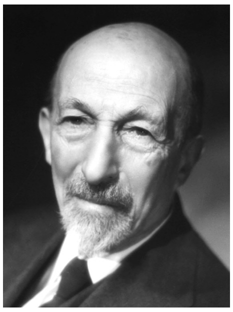
NAME: | AUFGABE 1

1. Hadamard hat Ziele formuliert bezüglich der Wohldefiniertheit von Randwertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen. Welche?



2. Geben Sie ein Randwertproblem für eine partielle Differentialgleichung an, für das man die Ziele mathematisch erreichen kann und beschreiben Sie wie.

NAME: | AUFGABE 2

1. Wie kann man die Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,y) - 4u_{yy}(x,y) = f(x,y)$$

überführen in

$$\tilde{u}_{st}(s,t) = \tilde{f}(s,t) \ ?$$

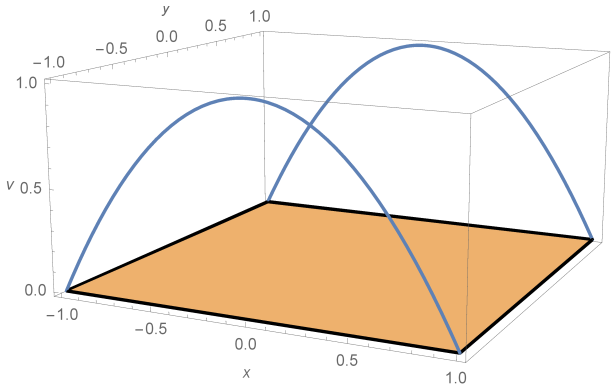
2. Sei $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R})$. Geben Sie eine Lösungformel für

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) - 4u_{yy}(x,y) = 0 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_y(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

NAME: | AUFGABE 3

Gegeben ist $Q = \{(x,y)\,;|x| < 1 \text{ und } |y| < 1\}$ und die Funktion $v(x,y) = 1 - x^2$.
Sei u die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } Q, \\ u = v & \text{auf } \partial Q. \end{cases}$$



Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\tfrac{1}{2} v(x,y) < u(x,y) < v(x,y) \text{ für alle } (x,y) \in Q.$$

NAME:	AUFGABE 4	

Gegeben ist die von dem Parameter a abhängige Differentialgleichung:

$$u_{xx} + au_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = f,$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gesucht.

1. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist diese Gleichung elliptisch?

2. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist diese Gleichung parabolisch?

3. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist diese Gleichung hyperbolisch?

4. Was kann man bei den restlichen $a \in \mathbb{R}$ sagen?

NAME: AUFGABE 5

Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) + u(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in B_1(0) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial B_1(0) \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2\left(\overline{B_1(0)} \times [0,\infty)\right)$ hat. *Hinweis: Energiefunktion*

NAME:	AUFGABE 6	

Geben Sie einen Mittelwertsatz an für harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$.

Name: Aufgabe 7

1. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g\left(y\right) = \frac{1}{4}e^{-2|x-y|}$. Zeigen Sie, dass im Sinne von Distributionen gilt, dass
$$-g'' + 4g = \delta_x.$$
Hier ist δ_x die Delta-distribution an der Stelle x.

2. Sei $f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}\right)$. Zeigen Sie, dass
$$\begin{cases} -u''\left(x\right) + 4u\left(x\right) = f\left(x\right) \\ \lim_{|x|\to\infty} u\left(x\right) = 0 \end{cases}$$
eindeutig gelöst wird durch
$$u\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4}e^{-2|x-y|} f\left(y\right) dy.$$

Name:	Aufgabe 8	

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$u_t(x,t) - u_x(x,t)\,(u(x,t))^2 = u(x,t)\,, \tag{1}$$
$$u(x,0) = \tfrac{1}{2}e^{-x^2}. \tag{2}$$

1. Wenn man diese Differentialgleichung mittels Charakteristiken löst, bekommt man das folgende Anfangswertproblem. Ergänzen Sie die Kästchen.

$$\begin{cases} X'(t) = \boxed{} & \text{mit} \quad X(0) = s \\ U'(t) = \boxed{} & \text{mit} \quad U(0) = \boxed{} \end{cases}$$

2. Zeigen Sie, dass die nächste Formel lokal eine Lösung von (1-2) definiert.

$$u\left(s - \tfrac{1}{8}\left(e^{2t}-1\right)e^{-2s^2}, t\right) = \tfrac{1}{2}e^{t-s^2}$$

3. Beschreiben Sie, was besonders ist an der Stelle $(x^*, t^*) = \left(-1, \tfrac{1}{2}\log\left(1+4\sqrt{e}\right)\right)$.

   Eine Skizze mit Lösung, Charakteristiken und der Stelle (x^*, t^*) folgt.