Name: | Aufgabe 1

Seien L_1 und L_2 die folgenden zwei Differentialoperatoren:

$$L_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \text{ und } L_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2.$$

Seien u_1 und u_2 in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ derart, dass $L_1 u_1 = 0$ und $L_2 u_2 = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig, beziehungsweise falsch?

1. $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (u_1 + u_2) = 0$ für alle solche Funktionen u_1, u_2.
2. $(L_1 + L_2)\, u_1 u_2 = 0$ für alle solche Funktionen u_1, u_2.
3. $L_1 L_2 (u_1 + u_2) = 0$ für alle solche Funktionen u_1, u_2.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Name: | Aufgabe 2

Wir betrachten

$$\left(1 + y^2\right) u_{xx}(x, y) + 2xy u_{xy}(x, y) + \left(1 + x^2\right) u_{yy}(x, y) = f(x, y).$$

1. Ist diese Differentialgleichung linear?
2. Ist diese Differentialgleichung elliptisch?

Begründen Sie Ihre Antworten.

NAME: AUFGABE 3

Wir betrachten verschiedene partielle Differentialgleichungen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}$ mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

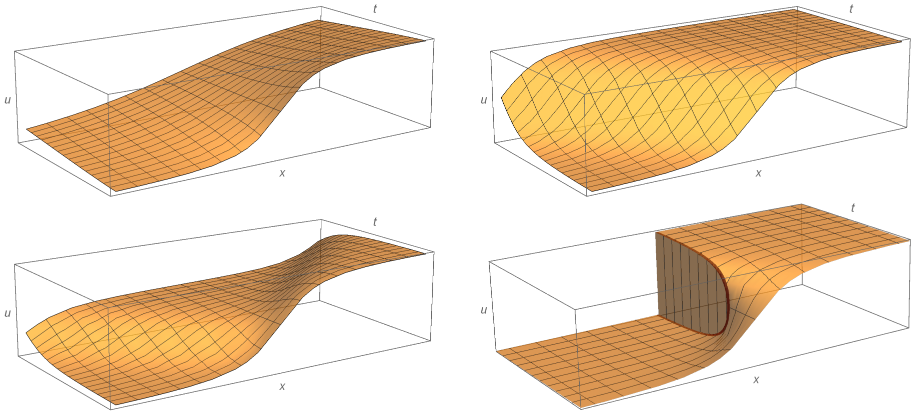
und haben zu jeder eine Lösung skizziert:

A. $u_t(x,t) = u_x(x,t)$;

B. $u_t(x,t) = u(x,t)\ u_x(x,t)$;

C. $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$;

D. $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$.



1. Welches Bild gehört zu welchem Problem?
2. Welche dieser Differentialgleichungen hat genau eine klassische Lösung?
3. Welche dieser Differentialgleichungen hat keine klassische Lösung jedoch genau eine Lösung in .... Sinne? Ergänzen Sie auch die Pünktchen.

Begründen Sie Ihre Antworten.

NAME: AUFGABE 4

Die Funktion $u^*(x,t) = \frac{x}{t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$ ist eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Ist dies ein Widerspruch zu der Behauptung, dass

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

für $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$ genau eine Lösung u in $C_b(\mathbb{R} \times [0,\infty)) \cap C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+})$ hat?

2. Zeigen Sie, dass im Sinne von Distributionen gilt:

$$\lim_{t \downarrow 0} u^*(\cdot,t) = c\, \delta_0',$$

und berechnen Sie c.

NAME: AUFGABE 5

Sei $B_\pi(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < \pi\}$ und

$$w_0(x) = \begin{cases} \sin(|x|)/|x| & \text{für } x \in \overline{B_\pi(0)} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $w(x,t) = w_0(x)\cos(t)$ ist eine Lösung von

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) = 0 & \text{in } B_\pi(0) \times \mathbb{R}^+, \\ w(x,t) = 0 & \text{auf } \partial B_\pi(0) \times \mathbb{R}^+, \\ w(x,0) = w_0(x) & \text{auf } B_\pi(0). \end{cases} \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass w nicht die einzige Lösung dieses Problems ist.
2. Geben Sie eine zusätzliche Rand- oder Anfangsbedingung derart an, dass (1) mit dieser Ergänzung w als eindeutige Lösung hat.
3. Beweisen Sie diese Eindeutigkeit (das Zitieren eines Satzes reicht nicht).

NAME: AUFGABE 6

Die Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} \alpha(y)\, d\sigma_y + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} \beta(y)\, d\sigma_y \right)$$

liefert für geschickte Funktionen α, β eine Lösung für ein bestimmtes Anfangswertproblem.

1. Welches Anfangswertproblem?
2. Erklären Sie, wie man mit dem Prinzip von Duhamel sogar eine Lösungsformel für das Anfangswertproblem findet, wenn die Differentialgleichung inhomogen ist.