Prof. Guido Sweers **SS 2011**
Matthias Erven

Partielle Differentialgleichungen
Aufgaben der Nachklausur vom 30.9.2011

1. Seien A, B Gebiete in $\mathbb{R}^2$, und sei $h : A \to B$ eine Abbildung, die bijektiv ist und A konform auf B abbildet. Eine Abbildung h heißt *konform*, wenn

$$\partial_x h_1(x,y) = \partial_y h_2(x,y) \text{ und } \partial_y h_1(x,y) = -\partial_x h_2(x,y).$$

Ergänzen Sie: Wenn $w = u \circ h$ ist und $\Delta u(s,t) = f(s,t)$ gilt für $(s,t) \in B$, dann gilt auf A

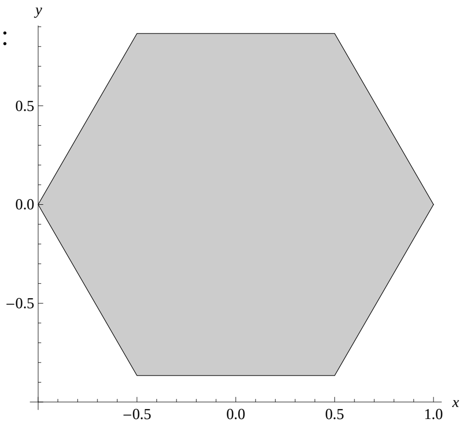
$$\Delta w = \ldots\ldots$$

2. Sei Ω ein Sechseck wie unten. Wir betrachten klassische nichtkonstante Lösungen u und v von

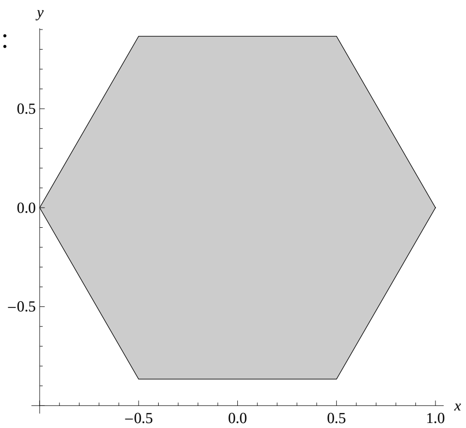
$$u_y - u_{xx} = 0 \qquad \text{und} \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

auf Ω. Markieren Sie in den untenstehenden Skizzen die Stellen, wo u und v jeweils ihr Maximum haben können. Begründen Sie Ihre Antworten.

– für u:



– für v:



3. Ein Modell für die zwei-dimensionale Potentialströmung eines Gases ist

$$\left(c^2-u_x^2\right)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+\left(c^2-u_y^2\right)u_{yy}=0.$$

Hier ist (u_x, u_y) der Geschwindigkeitsvektor des Gases und c die Schallgeschwindigkeit. Zeigen Sie, dass der Typ der Differentialgleichung nur vom Betrag der Geschwingkeit abhängt, und geben Sie an, welcher Typ wann vorliegt.

4. Wir betrachten die Gleichung

$$xu_x+yu_y=4u \text{ für } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

   (a) Berechnen Sie die charakteristischen Kurven.

   (b) Berechnen Sie eine Lösung, für die $u(x,y)=1$ gilt auf dem Kreis $\{(x,y);x^2+y^2=1\}$.

5. Sie $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ ein Gebiet.

   (a) Wann heißt eine Funktion $u\in C(\Omega)$ superharmonisch auf Ω?

   (b) Es seien $u,v\in C(\Omega)$ superharmonisch auf Ω. Zeigen Sie, dass w, definiert durch

$$w(x):=\min\left(u(x),v(x)\right),$$

   auch superharmonisch ist auf Ω.

6. Für $x\in\mathbb{R}$ sei $F(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$. Sei $f\in C_0(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}}F(x-y)\,f(y)dy$$

definierte Funktion eine Lösung ist von

$$\begin{cases}\left(-\partial_x^2+1\right)u=f \text{ in } \mathbb{R},\\ \lim_{|x|\to\infty}u(x)=0.\end{cases}$$

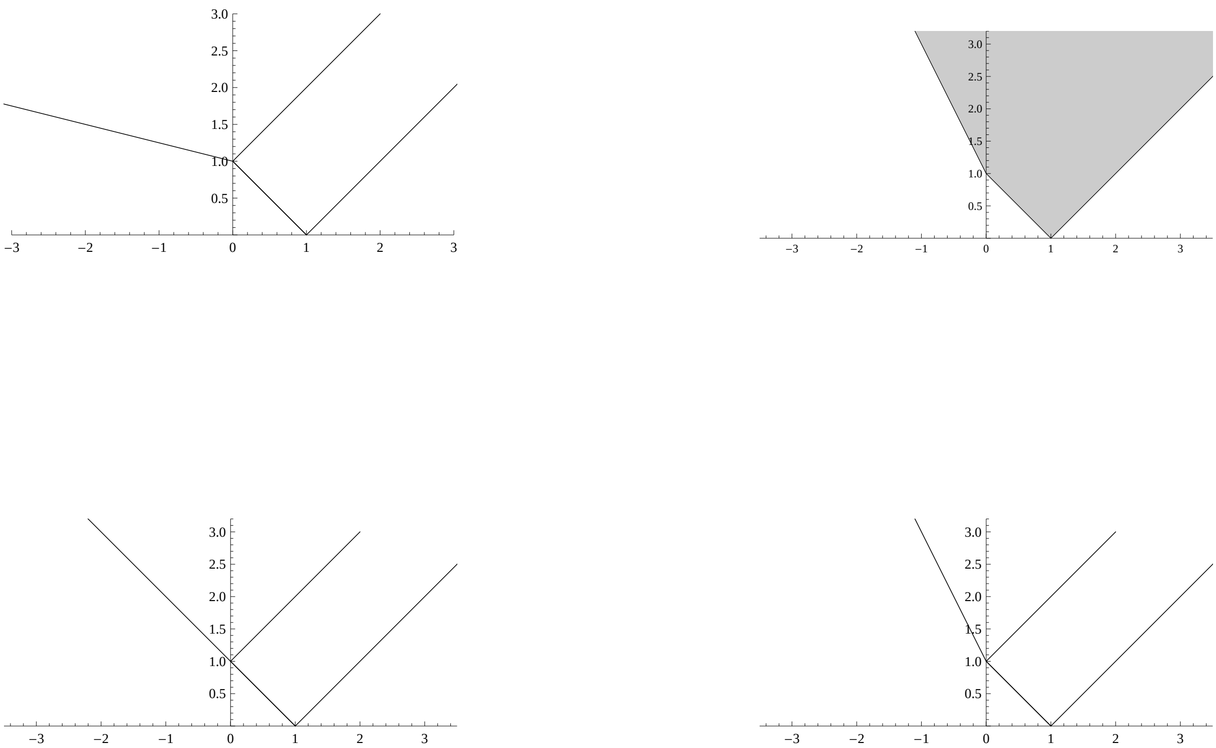
7. Die Wellengleichung in einer Dimension in einem inhomogenen Medium lautet

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \partial_x\left(c(x)^2\,\partial_x u(x,t)\right) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bei Schallwellen ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c in Wasser etwa viermal so groß wie in Luft. Wir betrachten das Modellproblem in einer Dimension beim Übergang von Luft nach Wasser. Dazu nehmen wir c wie folgt:

$$c(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0, \\ 4 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Wie sieht das Einflussgebiet zu u_0 bezüglich $(x_0, t_0) = (1, 0)$ aus? Wählen Sie eine der Skizzen aus und begründen Sie Ihre Antwort.



8. Wir betrachten

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2)\,u(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1}$$

Für $f \equiv 0$ gibt es einen Kern $p(x,y,t)$, so dass

$$u(x,t) = \int_0^\pi p(x,y,t)\,u_0(y)\,dy$$

die Gleichung (1) löst. Beschreiben Sie, wie man eine Lösung von (1) mit $f \not\equiv 0$ und $u_0 \equiv 0$ darstellen kann.

NB: Für $(0,\pi) \times \mathbb{R}^+$ ist dieser Kern übrigens explizit bekannt, er lautet

$$p(x,y,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 t} \sin(kx) \sin(ky).$$