NAME: AUFGABE 1

Wir betrachten

$$\begin{cases} u_x(x,y) + u_y(x,y)\exp(u(x,y)) = 1 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \arctan(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (\circledast)$$

(i) Welches Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert lokal eine Lösung für ($\circledast$)?

(ii) Berechnen Sie die Lösung des Systems aus (i).

(iii) Berechnen Sie eine lokale parametrisierte Lösung von ($\circledast$).

(iv) Begründen Sie, dass in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ keine Stoßwellen auftreten.

NAME: AUFGABE 2

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0\,.$$

Sei $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ gegeben. Dann ist sowohl $u_1(x,y) = u_0(x-3y)$, als auch $u_2(x,y) = u_0(x+y)$ eine Lösung mit Anfangswert $u(x,0) = u_0(x)$.

(i) Berechnen Sie b und c.

(ii) Berechnen Sie mit b und c aus (i) die Lösung von

$$P_{ii}: \begin{cases} u_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_y(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

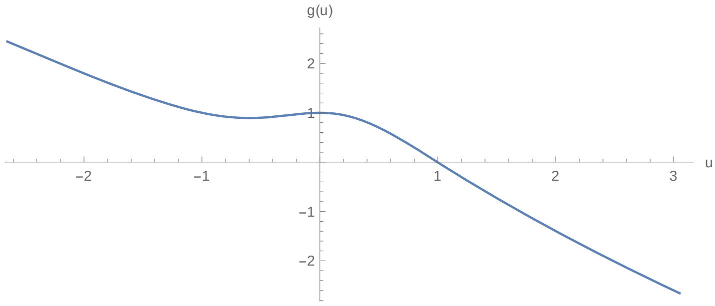
(iii) Berechnen Sie mit b und c aus (i) die Lösung von

$$P_{iii}: \begin{cases} u_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_y(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Name: Aufgabe 3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir betrachten für

$$g(u) = \frac{1 - u^3}{1 + u^2}$$



das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (\star)$$

(i) Ist diese Differentialgleichung linear, semilinear oder quasilinear?

(ii) Sei u eine klassische Lösung von $(\star)$ und sei $x_0 \in \Omega$ die Stelle, bei der gilt

$$0 < u(x_0) = \max(u) := \max\left\{u(x)\,; x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Was folgt aus dem Maximum-Prinzip für das Vorzeichen von $g(u(x_0))$?

(iii) Begründen Sie, dass $\max(u) \leq 1$ und dass $\min(u) = 0$ gilt.

Name: Aufgabe 4

Wir betrachten

$$2u_{xx} + 3u_{yy} + 4u_{xy} - u_x + 2u_y + u = f.$$

(i) Geben Sie das Symbol dieses Differentialoperators an.

(ii) Zeigen Sie, dass dies eine elliptische Gleichung ist.

(iii) Gibt es eine lineare Transformation $(x, y) \mapsto (\eta, \xi)$, also mit

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

sodass die transformierten Funktionen $U(\eta, \xi) := u(x, y)$ eine hyperbolische Differentialgleichung erfüllen?

NAME:	AUFGABE 5	

(i) Sei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ und $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Was bedeutet

$$\Delta g = 2\pi\delta_0?$$

(ii) Sei $L = \partial_x^2 + \partial_x\partial_y + \partial_y^2$. Berechnen Sie

$$L \ln\left(x^2 - xy + y^2\right)$$

im Sinne von Distributionen.

Hinweis: *Setzt man* $s = \frac{1}{2}\sqrt{3}(x-y)$ *und* $t = \frac{1}{2}(x+y)$, *so folgt*

$$\ln\left(x^2 - xy + y^2\right) = \ln\left(s^2+t^2\right) \text{ und } \det\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. *Für* Φ *definiert durch*

$$\Phi(s,t) = \Phi\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(x-y), \tfrac{1}{2}(x+y)\right) = \varphi(x,y),$$

folgt

$$L\varphi(x,y) = \tfrac{3}{4}\left(\partial_s^2 + \partial_t^2\right)\Phi(s,t).$$

NAME:	AUFGABE 6	

Sei $u \in C^2([-1,1]\times[0,\infty))$ eine Lösung vom Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,t) + u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in [-1,1]\times\mathbb{R}^+, \\ u_x(-1,t) = u_x(1,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in [-1,1]. \end{cases}$$

Wir definieren $F, G : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) = e^t \int_{-1}^{1} u(x,t)\,dx \qquad \text{und} \qquad G(t) = \int_{-1}^{1} u(x,t)^2\,dx.$$

(i) Zeigen Sie, dass F konstant ist.

(ii) Zeigen Sie, dass G monoton fallend ist.

(iii) Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem in $C^2([-1,1]\times[0,\infty))$ höchstens eine Lösung hat.