NAME: AUFGABE 1

Berechnen Sie eine explizite Lösung von

$$\begin{cases} x\ u_x\,(x,y) + y\ u_y\,(x,y) = x, \\ u\,(x,y) = 1 \text{ für } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Geben Sie auch das größte Gebiet in $\mathbb{R}^2$ an, in dem sich diese Lösung definieren lässt.

NAME: AUFGABE 2

Wir betrachten für $a \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,y) + a\ u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) = (x+y)^2 .$$

1. Für welche a ist sie elliptisch, bzw. parabolisch, hyperbolisch? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Geben Sie eine explizite Lösung für eine von Ihnen gewählte Zahl a an.

NAME:	AUFGABE 3	

Hadamard nannte ein Rand- oder Anfangswertproblem für eine partielle Differentialgleichung wohlgestellt, wenn Existenz, Eindeutigkeit und „Robustheit“ gilt. Wir betrachten

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) - 4u_{yy}(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0 \qquad\qquad \text{für } (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass für $\Omega = (0,1) \times (0,3)$ die Funktion $u(x,y) = \sin(4\pi x)\sin(2\pi y)$ eine Lösung von (1) ist.
2. Geben Sie eine nicht-triviale Lösung für $\Omega = (0,1) \times \left(0, \frac{31}{10}\right)$ an.
3. Für $\Omega = (0,1) \times (0,\pi)$ existiert nur die triviale Lösung $u = 0$. Dies müssen Sie jedoch nicht zeigen. Sagen Sie nur, ob das Problem in (1) nach Hadamard wohlgestellt ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

NAME:	AUFGABE 4	

Für $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ definieren wir die Funktion

$$u^*(x,t) = 8\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)\right) = \frac{x\left(6t - x^2\right)}{t^3\sqrt{t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

1. Zeigen Sie, dass diese Funktion eine Lösung ist von
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
2. Ist dies ein Widerspruch zu der Behauptung, dass
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
für $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$ genau eine Lösung u in $C_b(\mathbb{R} \times [0,\infty)) \cap C^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\right)$ hat?

Name:	Aufgabe 5	

Die Lösungsfunktion ist

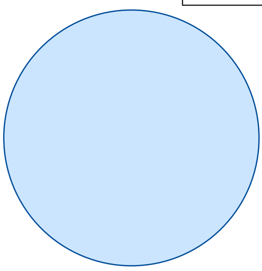
$$u(x,t) = \frac{1}{\pi t} \int_{|x-y|=t} e^{-|y|^2}\, dy.$$

Welches Anfangswertproblem hat genau diese Funktion als eindeutige Lösung?

Name:	Aufgabe 6	

Für

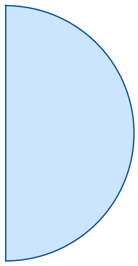
$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0), \end{cases}$$



hat man die Lösungsformel

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|y|<1} \ln\left(1 + \frac{\left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)}{|x-y|^2}\right) f(y)\, dy.$$

Geben Sie eine Lösungsformel an für



$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial D, \end{cases}$$

wenn $D = \{x \in B_1(0)\,; x_1 > 0\}$.

NAME: | AUFGABE 7

Begründen Sie, wieso

$$\begin{cases} -\Delta u\,(x) = f\,(x) & \text{für } x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0), \end{cases}$$

genau eine Lösung hat.