Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2019**
Inka Schnieders, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 27.06.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. **(4 Punkte)** Wenn $v_1, v_2 \in C_b^2\left(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\right)$ Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $v_t = \Delta v$ sind und

$$v_1(x,0) \leq v_2(x,0) \text{ für } x \in \mathbb{R}^3,$$

dann gilt

- entweder $v_1(x,t) < v_2(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$,
- oder $v_1(x,t) \equiv v_2(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$.

Zeigen Sie dies.

Aufgabe 2. **(2+2+2+2+0 Punkte)** Ersetzt man den zweiten Term in der Wärmeleitungsgleichung durch u^m mit $m > 1$, dann bekommt man die Poröse-Medien-Gleichung für $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, nämlich

$$u_t - \Delta(u^m) = 0. \tag{1}$$

Sie modelliert die Konzentration $u \geq 0$ eines Gases, wenn dieses durch ein poröses Medium fließt. Für (1) gibt es explizite nach Barenblatt benannte Lösungen. Für $m = 2$ sind sie für beliebige $R > 0$ wie folgt definiert:

$$u(x,t) = t^{-3/5}\left(R - \frac{1}{20}\frac{|x|^2}{t^{2/5}}\right)^+. \tag{2}$$

Man verwendet hier die Notation

$$(fun)^+ = \begin{cases} fun & \text{für } fun > 0, \\ 0 & \text{für } fun \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für u aus (2) gilt:

$$u \in C^{0,1}\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right) \text{ und } u^2 \in C^{1,1}\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right).$$

Hinweis: Es gilt $u \in C^{0,1}\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right)$ *wenn es für jedes* $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ *ein* $L > 0$ *und eine Umgebung* $U_{(x,y)} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ *gibt, sodass*

$$|u(x,t) - u(y,s)| \leq L\|(x,t) - (y,s)\|$$

für alle $(y,s) \in U_{(x,t)}$.

(b) Berechnen Sie für festes $R > 0$ den Träger einer Funktion u aus (2).

(c) Zeigen Sie, dass diese Funktion $u(x,t)$ die Differentialgleichung in (1) im folgenden schwachen Sinne erfüllt:

$$\int \left(-\varphi_t(x,t)\ u(x,t) + \nabla\varphi(x,t) \cdot \nabla u(x,t)^2\right) dxdt = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right)$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{t\downarrow 0} u(x,t)$.

(e) Auch für (1) gibt es ein Maximum Prinzip, nämlich, dass für schwache Lösungen $u \in C^{0,1}\left(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\right)$ und für beschränkte $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $T > 0$ gilt:

$$\sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,T)} u(x,t) = \sup_{(x,t)\in\partial_P(\Omega\times(0,T))} u(x,t).$$

Gilt auch ein starkes Vergleichsprinzip wie in Aufgabe 1 dargestellt?

Aufgabe 3. Wir betrachten für $m > 1$ nicht-negative Lösungen $u \in C^{1,1}\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta (u(x,t))^m = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x,0) \geq 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von $E(t) := \int_\Omega u(x,t)^2 \, dx$, dass

(a) $E'(t) \leq 0$ für alle $t \in (0,\infty)$;

(b) angenommen es gibt eine Funktion $u_\infty(x)$ mit $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t) - u_\infty\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 0$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

Aufgabe 4. **(2+1+1+1+2+1 Punkte)** Die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) + 6u(x,t)\,\partial_x u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) = 0$$

ist nach Korteweg und de Vries benannt und soll flache Wasserwellen modellieren.

(a) Sie hat Lösungen der Form $u(x,t) = v(x - \sigma t)$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$. Geben Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für v an.

(b) Diese Differentialgleichung hat die Form $\frac{d}{ds} F(v''(s), v'(s), v(s)) = 0$. Also gilt

$$F(v''(s), v'(s), v(s)) = c_1.$$

Berechnen sie F.

(c) Auch $v'(s)\,F(v''(s), v'(s), v(s)) = c_1 v'(s)$ kann man noch einmal explizit integrieren und man findet eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Konstanten. Geben Sie diese Differentialgleichung an.

(d) Durch Trennung der Variablen kann man auch diese letzte Differentialgleichung implizit lösen. Geben Sie die implizite Darstellung an.

(e) Man findet so Lösungen der Form

$$u(x,t) = \frac{\sigma}{2\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x - \sigma t - c)\right)\right)^2}.$$

Zeigen Sie, dass u tatsächlich eine Lösung für $\sigma > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ ist.

(f) Beschreiben Sie, wie die Lösungen aussehen.

Aufgabe 5. Mehrmals werden im Skript Hilfsfunktionen verwendet, die ein Problem lokalisieren. Das heißt, wenn $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen sind und derart, dass $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, nimmt man eine Funktion $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

i) $0 \leq \chi(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$;

ii) $\chi(x) = 1$ für alle $x \in \overline{\Omega}_1$;

iii) $\chi(x) = 0$ für alle $x \notin \Omega_2$.

Geben Sie eine explizite Konstruktion für χ an, wobei

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^3; 1 < x_3 < 4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{x \in \mathbb{R}^3; 0 < x_3 < 5 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}. \end{aligned}$$