

Skript mit Aufgaben für

Partielle Differentialgleichungen



... für online Zeiten

G. Sweers

Sommersemester 2021

Vorwort

Diese Vorlesung wird höchstwahrscheinlich im online-Format stattfinden. Dies bedeutet, dass die Studierenden sich für einen größeren Teil selbstständig mit dem Stoff auseinandersetzen müssen. Um die Beispiele und Aufgaben klar zu markieren, sind die farblich markiert.

Das Skript ist dem Skript aus 2019 sehr ähnlich mit Ausnahme der zusätzlichen Aufgaben.

Inhaltsverzeichnis

1 Ähnliches und Anderes	1
1.1 Lösungen bei GDGL und bei PDGL	1
1.2 Randbedingungen	5
2 Wiederholung und Neuanfang	11
2.1 Differentialgleichungen und klassische Lösungen	11
2.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit	12
2.2.1 Stetigkeit	12
2.2.2 Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen	13
2.2.3 Vollständigkeit bei $C(\bar{\Omega})$	14
2.3 Intermezzo zu glatten Rändern	17
2.4 Integration in \mathbb{R}^n	20
2.5 Integration über einen Rand	21
2.5.1 Kurvenlänge	21
2.5.2 Flächeninhalt einer Mannigfaltigkeit	21
2.5.3 Randintegrale	22
2.6 Partielle Integration in \mathbb{R}^n	23
2.7 Integrale und Transformationen	25
3 Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen	29
3.1 Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen	29

3.2	Klassische Lösungen	30
3.3	Nicht-klassische Lösungen	30
3.3.1	Schwache Ableitungen	30
3.3.2	Schwache und distributionelle Lösungen	34
3.4	Kriterien von Hadamard	37
4	Modelle und erste Ergebnisse	39
4.1	Transportgleichung	39
4.2	Wärmeleitungsgleichung	41
4.2.1	Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete	42
4.3	Die Laplace Gleichung	43
4.3.1	Ein Ergebnis für harmonische Funktionen	44
4.4	Die schwingende Saite	46
4.5	Die Wellengleichung	48
4.6	Die Membran	49
4.7	Stationäre Saiten und Balken	51
5	Erster Ordnung: Transportgleichungen	53
5.1	Lineare und semilineare Transportgleichungen	53
5.1.1	Picard-Lindelöf	53
5.1.2	Transportgleichungen mit konstanten Koeffizienten	54
5.1.3	Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen	56
5.2	Quasilineare Transportgleichungen	59
5.2.1	Stoßwellen	61
5.2.2	Verdünnungswellen	65
5.2.3	Physikalische Begründung	66
5.3	Übersicht	67
6	Klassifizierung zweiter Ordnung	71
6.1	Die einfachsten Fälle als Begründung	71
6.1.1	Das Symbol	71
6.1.2	Zerlegung des Symbols in Lineartermine	72

6.2	Standardbeispiele zu diesen Fällen	74
6.2.1	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$	74
6.2.2	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$	77
6.2.3	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$	80
6.2.4	Intermezzo zum Lemma von Abel	81
6.2.5	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$	82
6.2.6	Welche Randbedingungen passen?	83
6.3	Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	83
6.3.1	In zwei Dimensionen	83
6.3.2	In höheren Dimensionen	84
6.3.3	Bei variablen Koeffizienten	87
7	Die 1d Wellengleichung	89
7.1	Die Wellengleichung in Raumdimension 1	89
7.2	Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall	93
8	Intermezzo zu Distributionen	97
8.1	Testfunktionen	97
8.2	Konvergenz für Testfunktionen	98
8.3	Distributionen	100
8.4	Distributionen und Differentialgleichungen	102
9	Die Wellengleichung in mehr Dimensionen	107
9.1	Kirchhoff für Raumdimension 3	107
9.2	Ergebnisse für beliebige Dimensionen	112
9.3	Poisson für Raumdimension 2	115
9.4	Raumdimensionen 4 und höher	117
9.5	Gebiete mit Rand	119
10	Die Wärmeleitungsgleichung I	121
10.1	Diffusionskern	121
10.2	Das Anfangswertproblem in mehr Dimensionen	126

10.3	Wärmeleitungsgleichung mit rechter Seite	126
10.4	Mittelwert und Maximum	128
10.5	Beweis von Theorem 10.8	131
10.6	Maximumprinzip und Eindeutigkeit	133
11	Die Wärmeleitungsgleichung II	137
11.1	Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung	137
11.2	Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion	138
11.3	Regularität	140
11.4	Technisches Intermezzo	141
11.5	Existenz auf beschränkten Gebieten	143
11.6	Zwei Gegenbeispiele	146
12	Die Laplace- und Poisson-Gleichungen	151
12.1	Fundamentallösung	151
12.2	Randwertprobleme	156
12.2.1	Die Methode von Perron	157
12.2.2	Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz	158
12.2.3	Durch Variationsrechnung	160
12.2.4	Ein Beispiel	161
13	Ordnung und Existenz bei Laplace	165
13.1	Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel	165
13.2	Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten	167
13.3	Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten	169
13.4	Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel	173
13.4.1	Das starke Maximum-Prinzip	174
13.4.2	Harmonisch auf Kugeln	175
14	Existenz nach Perron	179
14.1	Das Theorem von Perron	179
14.2	Minimum und Infimum bei superharmonisch	180

14.3 Beweis mit Barrieren am Rand	181
15 Laplace und Regularität	183
15.1 Bemerkungen zur Regularität	183
15.2 Regularität und Fundamentallösung	184
15.3 Regularität und Rand	185
15.4 Lösungen und Abschätzungen	187
16 Semilineare Laplace-Gleichungen	191
16.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip	191
16.2 Existenz bei einer einfachen Perturbation	193
16.3 Schwach harmonisch ist harmonisch	195
16.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung	197
16.5 Variationelle Methoden	200
Literaturverzeichnis	203

Ähnliches und Anderes

1.1 Lösungen bei GDGL und bei PDGL

Wenn man ein Seil zwischen zwei gleichhohe Stellen spannt, und man lässt auf das Seil vertikale Kräfte wirken, dann bekommt man das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ u(a) = h = u(b). \end{cases} \quad (1.1)$$

Mit Hilfe der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen kann man eine Lösung finden durch eine Greensche Funktion. Das wollen wir nicht wiederholen. Wir möchten schon bemerken, dass man durch Skalierung und „Verschiebung“¹ statt (1.1) ohne Verlust der Allgemeinheit

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x) & \text{für } x \in (0, 1), \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases}$$

¹Man setzt dazu $\tilde{x} = \frac{x-a}{b-a}$, $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(a + (b-a)\tilde{x}) - h$ und $\tilde{f}(\tilde{x}) = (b-a)^2 f(a + (b-a)\tilde{x})$.

betrachten kann. Auch ohne Greensche Funktion kann man oft gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung schreiben. Manchmal kann man gewöhnliche Differentialgleichungen, insbesondere lineare, als Iteration von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten. Man kann nicht nur u_{xx} als $(u_x)_x$ betrachten, aber zum Beispiel auch

$$-u_{xx} + u_x + u = f$$

als zwei wiederholte DGL erster Ordnung, wenn man diese umschreibt nach

$$-\left(\partial_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\partial_x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)u = f.$$

Hier ist ∂_x das Ableiten nach x . Wenn nur $x \in \mathbb{R}$ als Variable erscheint, dann hat man die folgenden Schreibweisen für die Ableitung $u'(x) = \partial_x u(x) = \frac{\partial}{\partial x} u(x) = u_x(x)$. Bei partiellen Ableitungen bleiben $\partial_{x_1} u(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) = \partial_1 u(x_1, x_2) = u_{x_1}(x_1, x_2)$, und Ähnliches für die Ableitung nach x_2 .

Kann man auch partielle Differentialgleichungen

zerlegen in aufeinanderfolgende Gleichungen erster Ordnung?

Betrachtet man kein eingespanntes Seil sondern ein Membran, dann hat man zwei Raumdimensionen und ein passendes einfaches Modell wäre

$$\begin{cases} -(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0. & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

wobei mit $\partial\Omega$ der Rand von Ω gemeint ist und mit Ω eine offene Menge in \mathbb{R}^2 .

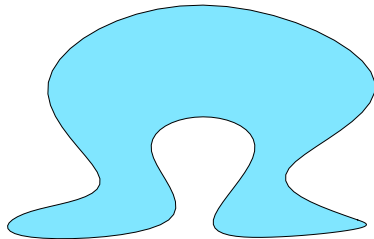


Abbildung 1.1: Ein Gebiet Ω muss nicht, aber kann so aussehen.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man auch hier skalieren, jedoch bleibt die Differentialgleichung so nur erhalten, wenn man verschiebt oder skaliert. Dann bleibt aber auch die Form des Gebietes erhalten. Das bedeutet:

- Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man bei partiellen Differentialgleichungen nicht ohne weiteres auf einer Standardmenge transformieren.

Versucht man die Differentialgleichung in (1.2) in Gleichungen erster Ordnung zu zerlegen, dann findet man

$$\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$$

and obwohl hier das komplexe i steht, ist das eine Zerlegung die weiterhilft, aber nur, wenn man Funktionentheorie gehört hat. Würde man dies jedoch in höheren Dimensionen versuchen, findet man erstmals zum Beispiel

$$\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 = \left(\partial_{x_1} + i\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2}\right) \left(\partial_{x_1} - i\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2}\right).$$

Das letztere ist jedoch keine Differentialgleichung mehr, sondern eine Pseudodifferentialgleichung und man sollte sich erstmal überlegen, wie man $\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2}$ definieren sollte.

Aufgabe 1.1 1. Zeigen Sie, dass es für jedes Paar $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Wir nennen diese beiden Differentialoperatoren gleich, wenn für alle $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}\right) u(x, y) = \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) u(x, y). \end{aligned}$$

Wenn $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, folgt dann $a, b \in \mathbb{R}$?

2. Vergleichen Sie die Zahl der Konstanten in

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y} + d \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Welche Darstellung ist allgemeiner?

- Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man eine partielle Differentialgleichung zweiter oder höherer Ordnung nicht ohne weiteres auf ein Gleichungssystem erster Ordnung bringen.

Wir verwendeten gerade $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ und $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$. Weil die Summe der zweiten Ableitungen ein sehr häufig vorkommender Differentialoperator ist, hat er ein eigenes Symbol bekommen.

Definition 1.1 Für n Dimensionen schreibt man

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2.$$

Man nennt Δ den Laplace-Operator nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon Laplace².

Bemerkung 1.1.1 Man erinnere sich vielleicht noch an zwei andere Differentialoperatoren, den Gradienten und die Divergenz. Für eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind diese wie folgt definiert:

1. Der Gradient ∇ wird definiert auf Funktionen $g \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ durch

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right)$$

und liefert eine Vektorwertige Funktion $\nabla g \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

²Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749–1827) war ein Schüler von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert. Beide haben sich mit partiellen Differentialgleichungen befasst.

2. Die Divergenz $\nabla \cdot$ wird definiert auf Vektorfunktionen $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, also $F = (F_1, \dots, F_n)$ mit $F_i \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, durch

$$(\nabla \cdot F)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_k}$$

und liefert eine Funktion $\nabla \cdot F \in C^0(\Omega; \mathbb{R})$.

Es folgt für $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, dass $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen braucht man Randbedingungen, um zu einer eindeutigen Lösung zu finden. Differentialgleichungen, gewöhnliche und partielle, werden motiviert durch Modelle aus der Natur, Technik, Wirtschaft etc. und will man eine Voraussage treffen, braucht es eine eindeutige Lösung.

Beispiel 1.2 Sei $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ die 2-dimensionale Einheitskreisscheibe. Dann ist

$$u(x_1, x_2) = \frac{1 - |x|^2}{4} = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (1.3)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

Wir werden noch zeigen, dass dieses Problem auch nur diese Lösung hat. Eine Skizze zu der Funktion in (1.3) findet man in Abbildung 1.2 links.

In diesem Beispiel gibt es eine Lösung und, wenn man Vertrauen hat in den vorletzten Satz, anscheinend auch nur diese Lösung. Was jedoch ist eine Lösung? Die Funktion in (1.3) liegt in $C^\infty(B_1(0))$ und für solche Funktionen u kann man $-\Delta u$ berechnen, sogar $C^2(\overline{B_1(0)})$ reicht, und die Gleichungen in (1.4) gelten punktweise.

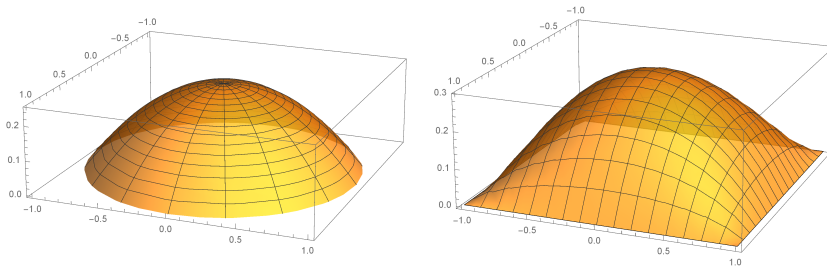


Abbildung 1.2: Skizzen der Lösungen aus Beispielen 1.2 und 1.3. Die Funktion rechts wurde approximiert.

Beispiel 1.3 Betrachten wir das Randwertproblem auf $Q = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = 1 & \text{für } x \in Q, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial Q. \end{cases}$$

Das Gebiet Q ist ein Quadrat und eine explizite Lösung ist nicht so einfach anzugeben, wenn überhaupt. Trotzdem kann man zeigen, dass es genau eine Lösung gibt. Eine Skizze zu der Lösung findet man in Abbildung 1.2 rechts.

Die Existenz einer Lösung ist hier noch etwas heikel. Man sieht leicht, dass eine Lösung nicht zweimal stetig differenzierbar sein kann auf dem abgeschlossenen Quadrat. Denn,

wenn u da zweimal stetig differenzierbar wäre, dann folgt aus $u(x_1, 1) = 0$ für alle $x_1 \in (-1, 1)$, dass $\partial_{x_1}^2 u(x_1, 1) = 0$ und ebenso aus $u(1, x_2) = 0$ für alle $x_2 \in (-1, 1)$, dass $\partial_{x_2}^2 u(1, x_1) = 0$. Zweimal stetig-differenzierbar liefert dann $\Delta u(1, 1) = 0$ und das wäre ein Widerspruch zu der Differentialgleichung. Lösungen muss man hier suchen als Funktionen, die zum Beispiel zweimal differenzierbar sind im Inneren, also auf Ω , und nur stetig auf der abgeschlossenen Menge $\overline{\Omega}$.

Obwohl im letzten Beispiel ein sehr einfaches Gebiet Ω betrachtet wird und die rechte Seite der Gleichung nur eine Konstante zeigt, gibt es anscheinend keine zweimal auf $\overline{\Omega}$ stetig-differenzierbare Lösung.

- Bei partiellen Differentialgleichungen soll man genau definieren, welche Funktionen man eine Lösung nennt.

Die Vielzahl an möglichen Gebieten und die vielen Kombinationen der partiellen Ableitungen geben noch weniger Hoffnung auf explizite Lösungsformeln als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- Bei partiellen Differentialgleichungen soll man sich konzentrieren auf qualitative Aspekte wie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Wenn bei einem Randwertproblem die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung geklärt ist, wäre der nächste Schritt, weitere Eigenschaften der Lösung herzuleiten, gegebenenfalls durch Approximierung der Lösung eventuell numerisch. Das letztere ist kein Teil dieser Vorlesung.

1.2 Randbedingungen

Bei der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = f(x)$$

hat man mehrere sinnvolle Möglichkeiten, durch Zusatzbedingungen die Eindeutigkeit einer Lösung zu bekommen:

1. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

hat genau eine Lösung, nämlich

$$u(x) = - \int_0^x \sinh(x-y) f(y) dy.$$

2. Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

hat auch genau eine Lösung, nämlich

$$u(x) = \sinh(1-x) \int_0^x \frac{\sinh(y)}{\sinh(1)} f(y) dy + \sinh(x) \int_x^1 \frac{\sinh(1-y)}{\sinh(1)} f(y) dy.$$

Auch bei *inhomogenen* Randbedingungen wie $u(0) = 5$ statt $u(0) = 0$ findet man immer noch eindeutige Lösungen. Man addiere in dem Fall $5 \cosh(x)$ zu der Lösung von (1.5), beziehungsweise $5 \frac{\sinh(1-x)}{\sinh(1)}$ zu der Lösung von (1.6).

Welche Randbedingungen passen bei partiellen Differentialgleichungen?

Dazu betrachten wir einige Beispiele. Zuerst nochmals das Beispiel 1.2, wobei wir nun jedoch einen Punkt auf dem Rand weglassen.

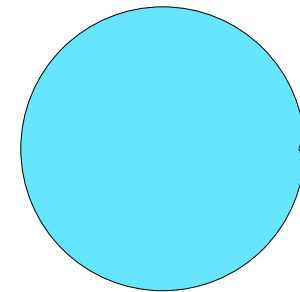


Abbildung 1.3: $B_1(0)$ in \mathbb{R}^2

Beispiel 1.4 Für das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0. & \text{für } x \in \partial B_1(0) \setminus \{(1,0)\}, \end{cases} \quad (1.7)$$

findet man Lösungen

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4} (1 - x_1^2 - x_2^2) + c \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}.$$

Die Konstante c kann man in \mathbb{R} beliebig wählen, und man findet unendlich viele Lösungen für (1.7).

Aufgabe 1.2 Es gilt tatsächlich, dass

$$\Delta \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} = 0 \text{ für } (x_1, x_2) \in \overline{B_1(0)} \setminus \{(1, 0)\}.$$

Zeigen Sie dies.

Also wenn man die Randbedingung an einer Stelle weglässt, hat man wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht mehr die Eindeutigkeit. Man könnte vermuten, dass man generisch bei einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auch auf alle Randstellen die Funktionswerte vorschreiben soll, um genau eine Lösung zu finden.

Kann man vielleicht die Randbedingung $u(1, 0) = 0$ durch $\partial_{x_1} u(1, 0) = 0$ ersetzen?

Die Bedingung $\partial_{x_1} u(1, 0) = 0$ verlangt, dass u und diese Ableitung definiert sind. Wenn u (1.7) erfüllt und stetig auf $\overline{B_1(0)}$ sein sollte, dann kann man zeigen, dass nur die Funktion $u(x) = \frac{1}{4}(1 - |x|^2)$ in Betracht kommt und $\partial_{x_1} u(-1, 0) = \frac{1}{2}$ gilt.

Sind Lösungen immer stetig bis auf dem Rand?

Aufgabe 1.3 Sei $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$ das Argument und setze

$$u(x, y) = \text{Arg}(1 + x + iy).$$

1. Begründen Sie, dass

$$u \in C^\infty(\overline{B_1(0)} \setminus \{(-1, 0)\}).$$

Die Funktion ist beschränkt, jedoch nicht stetig fortsetzbar auf $B_1(0)$.

2. Ergänzen Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = \dots & \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(\cos \varphi, \sin \varphi) = \dots & \text{für } \varphi \in (-\pi, \pi), \\ \lim_{x \downarrow -1} u(x, 0) = \dots \end{cases}$$

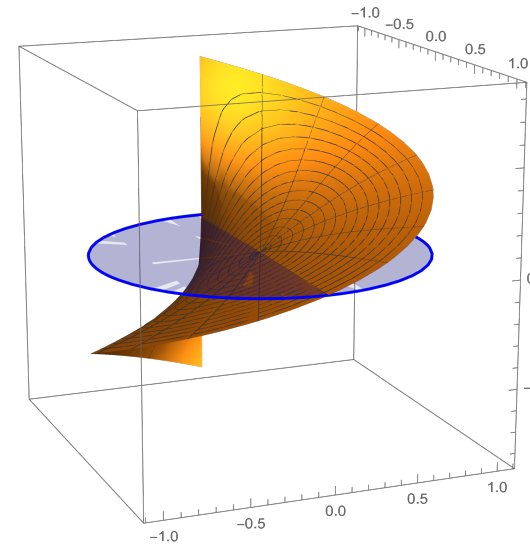


Abbildung 1.4: Die Funktion aus Aufgabe 1.3

Kann man vielleicht die Stetigkeit weglassen und die Randbedingung $\partial_{x_1} u(0, 0) = 0$ durch das schwächere $\lim_{x_1 \uparrow 1} \partial_{x_1} u(x_1, 0) = 0$ ersetzen?

Beispiel 1.5 Die letzte Bedingung reicht leider gar nicht für Eindeutigkeit und das sieht man mit der Funktion aus dem letzten Beispiel: Setze

$$v(x_1, x_2) := \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$$

Diese Funktion ist stetig auf $\overline{B_1(0)} \setminus 0$, aber nicht beschränkt bei $(1, 0)$. Es gilt $\Delta v = 0$ in $B_1(0)$ und die Randbedingung in (1.7).

Definiere den Differentialoperator

$$L : C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

durch

$$(Lu)(x_1, x_2) = x_1 \partial_{x_2} u(x_1, x_2) - x_2 \partial_{x_1} u(x_1, x_2).$$

Diesen Differentialoperator kann man auch verwenden für Funktionen, die nicht auf ganz \mathbb{R}^2 definiert sind, wenn man sich beschränkt auf die Stellen, wo die betreffende Funktion differenzierbar ist. Wir verwenden diesen Operator L für Funktionen, die differenzierbar sind auf $\overline{B_1(0)} \setminus \{(1, 0)\}$.

Man kann zeigen, dass nicht nur auch

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2) + cv(x_1, x_2)$$

für beliebige $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (1.7) ist, sondern, dass sogar

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2) + \sum_{k=0}^{4711} c_k (L^k v)(x_1, x_2).$$

für beliebige $c_i \in \mathbb{R}$ das Randwertproblem erfüllen. Außerdem kann man zeigen, dass $\{L^k v\}_{k=0}^{4711}$ ein unabhängiges System bildet. Da für die ungeraden Elemente $L^k v$, also für $k \in 2\mathbb{N} + 1$, gilt, dass $\lim_{x_1 \downarrow -1} \partial_{x_1} L^k v(x_1, 0) = 0$, ist das Ersetzen von $u(1, 0) = 0$ durch $\lim_{x_1 \downarrow -1} \partial_{x_1} u(x_1, 0) = 0$ nicht ausreichend, um Eindeutigkeit zu erreichen.

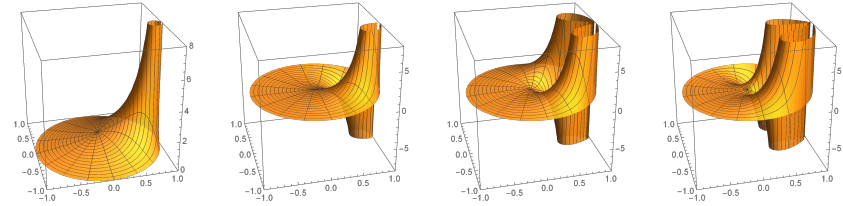


Abbildung 1.5: Die ersten 4 Funktionen aus der Reihe v, Lv, L^2v, L^3v, \dots , die bei $(1, 0)$ jeweils höhere Singularitäten aufweisen.

Aufgabe 1.4 Sei $\Psi \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ mit $\Psi(-\pi) = \Psi(\pi)$ gegeben durch die konvergente Reihe

$$\Psi(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\varphi}.$$

Zeigen Sie, dass $u : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi}$$

1. konvergiert für $r \in [0, 1]$, und das gilt $u \in C^2(B_1(0))$;
2. eine Lösung ist von

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(\cos \varphi, \sin \varphi) = \Psi(\varphi) & \text{für } \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Beispiel 1.6 Als nächstes Randwertproblem betrachten wir auf

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < \pi \text{ und } 0 < x_2 < \pi\}$$

das Randwertproblem:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in Q, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial Q. \end{cases} \quad (1.8)$$

Offensichtlich ist $u(x_1, x_2) = 0$ eine Lösung. Wir finden jedoch auch, dass

$$u(x_1, x_2) = c \sin(x_1) \sin(x_2) \quad (1.9)$$

mit jeder beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist, obwohl auf dem ganzen Rand $u = 0$ vorgeschrieben ist. Der Unterschied mit vorhin ist ein Minus-Zeichen zwischen beiden Ableitungen.

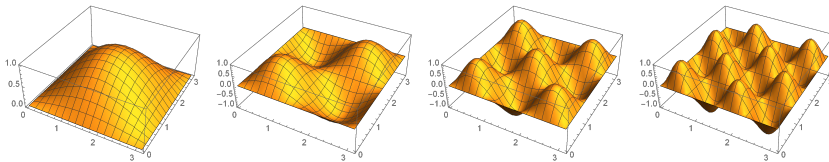


Abbildung 1.6: Links die Funktion aus (1.9) als auch noch drei andere Lösungen von (1.8). Raten Sie welche!

Beispiel 1.7 Wiederum

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < \pi \text{ und } 0 < x_2 < \pi\},$$

jedoch jetzt betrachten wir andere Randbedingungen, nämlich

das Randwertproblem:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } (x_1, x_2) \in Q, \\ \text{links:} & u(0, x_2) = 0 & \text{für } x_2 \in [0, \pi], \\ \text{rechts:} & u(\pi, x_2) = 0 & \text{für } x_2 \in [0, \pi], \\ \text{unten:} & u(x_1, 0) = 0 & \text{für } x_1 \in [0, \pi] \\ \text{unten:} & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \right)_{|x_2=0} = 0 & \text{für } x_1 \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Oben stellen wir keine Randbedingung. Unten gibt es hier zwei unabhängige Randbedingungen. Wir werden später zeigen, dass dieses Problem nur $u = 0$ als Lösung hat, jedenfalls nachdem wir Lösungen vernünftig definiert haben.

- Anscheinend sind bei partiellen Differentialgleichungen die Randbedingungen, die Eindeutigkeit garantieren, abhängig von einer Klassifizierung der betreffenden Differentialgleichung.

Übrigens erscheint die Differentialgleichung aus den letzten beiden Beispielen bei einer schwingenden Saite. Dass man sich erstmal die partiellen Differentialgleichungen anschaut, die eine Anwendung haben, ist nicht nur, weil man nur an Anwendungen interessiert sein soll. Der eigentliche Grund für eine solche Einschränkung ist die Tatsache, dass jeder Typ seine Eigenarten hat. Man kann beliebig wilde Kombinationen von partiellen Ableitungen aufschreiben und versuchen dazu etwas zu sagen. Die Theorie von „Allem“ gibt es aber nicht.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer Bemerkung von Jac-

ques-Louis Lions³, der Alan Turing⁴ wie folgt zitiert haben soll:

PDE's are made by God, the boundary conditions by the Devil!

³Jacques-Louis Lions, 1928-2001, französischer Mathematiker mit wesentlichen Beiträgen zu Randbedingungen für partielle Differentialgleichungen

⁴Alan Mathison Turing, 1912-1954, englischer Mathematiker, der auf vielen Gebieten der Mathematik gearbeitet hat.

