Skript mit Aufgaben für

Partielle Differentialgleichungen

... für online Zeiten

G. Sweers

Sommersemester 2021

Vorwort

Diese Vorlesung wird höchstwahrscheinlich im online-Format stattfinden. Dies bedeutet, dass die Studierenden sich für einen größeren Teil selbstständig mit dem Stoff auseinandersetzen müssen. Um die Beispiele und Aufgaben klar zu markieren, sind die farblich markiert.

Das Skript ist dem Skript aus 2019 sehr ähnlich mit Ausnahme der zusätzlichen Aufgaben.

Inhaltsverzeichnis

Partielle Differentialgleichungen Woche 1

Ähnliches und Anderes

1.1 Lösungen bei GDGL und bei PDGL

Wenn man ein Seil zwischen zwei gleichhohe Stellen spannt, und man lässt auf das Seil vertikale Kräfte wirken, dann bekommt man das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x) & \text{für } x \in (a,b), \\ u(a) = h = u(b). \end{cases} \tag{1.1}$$

Mit Hilfe der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen kann man eine Lösung finden durch eine Greensche Funktion. Das wollen wir nicht wiederholen. Wir möchten schon bemerken, dass man durch Skalierung und „Verschiebung“[1] statt (1.1) ohne Verlust der Allgemeinheit

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x) & \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases}$$

betrachten kann. Auch ohne Greensche Funktion kann man oft gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung schreiben. Manchmal kann man gewöhnliche Differentialgleichungen, insbesondere lineare, als Iteration von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten. Man kann nicht nur u_{xx} als $(u_x)_x$ betrachten, aber zum Beispiel auch

$$-u_{xx} + u_x + u = f$$

als zwei wiederholte DGL erster Ordnung, wenn man diese umschreibt nach

$$-\left(\partial_x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\partial_x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) u = f.$$

Hier ist ∂_x das Ableiten nach x. Wenn nur $x \in \mathbb{R}$ als Variable erscheint, dann hat man die folgenden Schreibweisen für die Ableitung $u'(x) = \partial_x u(x) = \frac{\partial}{\partial x} u(x) = u_x(x)$. Bei partiellen Ableitungen bleiben $\partial_{x_1} u(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1,x_2) = \partial_1 u(x_1,x_2) = u_{x_1}(x_1,x_2)$, und Ähnliches für die Ableitung nach x_2.

Kann man auch partielle Differentialgleichungen

[1] Man setzt dazu $\tilde{x} = \frac{x-a}{b-a}$, $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(a + (b-a)\tilde{x}) - h$ und $\tilde{f}(\tilde{x}) = (b-a)^2 f(a + (b-a)\tilde{x})$.

zerlegen in aufeinanderfolgende Gleichungen erster Ordnung?

Betrachtet man kein eingespanntes Seil sondern ein Membran, dann hat man zwei Raumdimensionen und ein passendes einfaches Modell wäre

$$\begin{cases} -\left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2\right) u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0. & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

wobei mit $\partial\Omega$ der Rand von Ω gemeint ist und mit Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$.

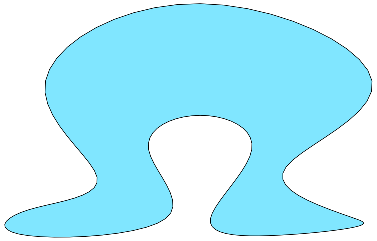

Abbildung 1.1: Ein Gebiet Ω muss nicht, aber kann so aussehen.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man auch hier skalieren, jedoch bleibt die Differentialgleichung so nur erhalten, wenn man verschiebt oder skaliert. Dann bleibt aber auch die Form des Gebietes erhalten. Das bedeutet:

- *Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man bei partiellen Differentialgleichungen nicht ohne weiteres auf einer Standardmenge transformieren.*

Versucht man die Differentialgleichung in (1.2) in Gleichungen erster Ordnung zu zerlegen, dann findet man

$$\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = \left(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}\right)\left(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}\right)$$

and obwohl hier das komplexe i steht, ist das eine Zerlegung die weiterhilft, aber nur, wenn man Funktionentheorie gehört hat. Würde man dies jedoch in höheren Dimensionen versuchen, findet man erstmals zum Beispiel

$$\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 = \left(\partial_{x_1} + i\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_2}^2}\right)\left(\partial_{x_1} - i\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_2}^2}\right).$$

Das letztere ist jedoch keine Differentialgleichung mehr, sondern eine Pseudodifferentialgleichung und man sollte sich erstmal überlegen, wie man $\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_2}^2}$ definieren sollte.

Aufgabe 1.1 *1. Zeigen Sie, dass es für jedes Paar $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Wir nennen diese beiden Differentialoperatoren gleich, wenn für alle $u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ gilt

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial x} + \lambda\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial x} + \mu\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial y}\right) u(x,y) = \left(\tfrac{\partial}{\partial x} + a\tfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x} + b\tfrac{\partial}{\partial y}\right) u(x,y).$$

Wenn $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, folgt dann $a, b \in \mathbb{R}$?

2. Vergleichen Sie die Zahl der Konstanten in

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x} + a\tfrac{\partial}{\partial y} + b\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x} + c\tfrac{\partial}{\partial y} + d\tfrac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial x} + \alpha\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial y} + \beta\tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial}{\partial z} + \gamma\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial y} + \delta\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial z} + \varepsilon\tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial}{\partial x}.$$

Welche Darstellung ist allgemeiner?

- *Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man eine partielle Differentialgleichung zweiter oder höherer Ordnung nicht ohne weiteres auf ein Gleichungssystem erster Ordnung bringen.*

Wir verwendeten gerade $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ und $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$. Weil die Summe der zweiten Ableitungen ein sehr häufig vorkommender Differentialoperator ist, hat er ein eigenes Symbol bekommen.

Definition 1.1 *Für n Dimensionen schreibt man*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2.$$

Man nennt Δ den Laplace-Operator nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon Laplace[2].

Bemerkung 1.1.1 *Man erinnere sich vielleicht noch an zwei andere Differentialoperatoren, den Gradienten und die Divergenz. Für eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind diese wie folgt definiert:*

1. *Der Gradient ∇ wird definiert auf Funktionen $g \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ durch*

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right)$$

und liefert eine Vektorwertige Funktion $\nabla g \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

2. *Die Divergenz $\nabla \cdot$ wird definiert auf Vektorfunktionen $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, also $F = (F_1, \dots, F_n)$ mit $F_i \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, durch*

$$(\nabla \cdot F)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}$$

und liefert eine Funktion $\nabla \cdot F \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$.

Es folgt für $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$, dass $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen braucht man Randbedingungen, um zu einer eindeutigen Lösung zu finden. Differentialgleichungen, gewöhnliche und partielle, werden motiviert durch Modelle aus der Natur, Technik, Wirtschaft etc. und will man eine Voraussage treffen, braucht es eine eindeutige Lösung.

Beispiel 1.2 *Sei $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ die 2-dimensionale Einheitskreisscheibe. Dann ist*

$$u(x_1, x_2) = \frac{1 - |x|^2}{4} = \tfrac{1}{4}\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \tag{1.3}$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0. & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Wir werden noch zeigen, dass dieses Problem auch nur diese Lösung hat. Eine Skizze zu der Funktion in (1.3) findet man in Abbildung 1.2 links.

[2] Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749–1827) war ein Schüler von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert. Beide haben sich mit partiellen Differentialgleichungen befasst.

In diesem Beispiel gibt es eine Lösung und, wenn man Vertrauen hat in den vorletzten Satz, anscheinend auch nur diese Lösung. Was jedoch ist eine Lösung? Die Funktion in (1.3) liegt in $C^\infty(\overline{B_1(0)})$ und für solche Funktionen u kann man $-\Delta u$ berechnen, sogar $C^2(\overline{B_1(0)})$ reicht, und die Gleichungen in (1.4) gelten punktweise.

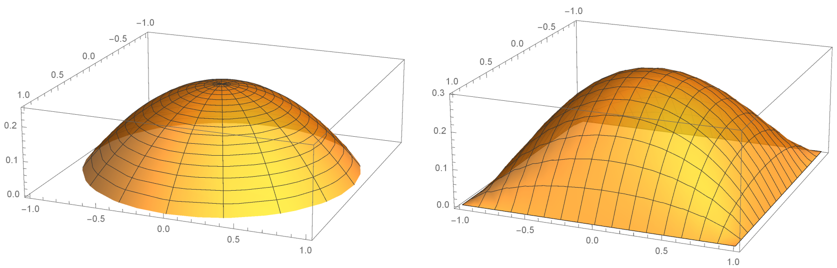

Abbildung 1.2: Skizzen der Lösungen aus Beispielen 1.2 und 1.3. Die Funktion rechts wurde approximiert.

Beispiel 1.3 *Betrachten wir das Randwertproblem auf* $Q = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$*:*

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1,x_2) = 1 & \text{für } x \in Q, \\ u(x_1,x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial Q. \end{cases}$$

Das Gebiet Q ist ein Quadrat und eine explizite Lösung ist nicht so einfach anzugeben, wenn überhaupt. Trotzdem kann man zeigen, dass es genau eine Lösung gibt. Eine Skizze zu der Lösung findet man in Abbildung 1.2 rechts.

Die Existenz einer Lösung ist hier noch etwas heikel. Man sieht leicht, dass eine Lösung nicht zweimal stetig differenzierbar sein kann auf dem abgeschlossenen Quadrat. Denn, wenn u da zweimal stetig differenzierbar wäre, dann folgt aus $u(x_1,1) = 0$ für alle $x_1 \in (-1,1)$, dass $\partial^2_{x_1} u(x_1,1) = 0$ und ebenso aus $u(1,x_2) = 0$ für alle $x_2 \in (-1,1)$, dass $\partial^2_{x_2} u(1,x_1) = 0$. Zweimal stetig-differenzierbar liefert dann $\Delta u(1,1) = 0$ und das wäre ein Widerspruch zu der Differentialgleichung. Lösungen muss man hier suchen als Funktionen, die zum Beispiel zweimal differenzierbar sind im Inneren, also auf Ω, und nur stetig auf der abgeschlossenen Menge $\overline{\Omega}$.

Obwohl im letzten Beispiel ein sehr einfaches Gebiet Ω betrachtet wird und die rechte Seite der Gleichung nur eine Konstante zeigt, gibt es anscheinend keine zweimal auf $\overline{\Omega}$ stetig-differenzierbare Lösung.

- *Bei partiellen Differentialgleichungen soll man genau definieren, welche Funktionen man eine Lösung nennt.*

Die Vielzahl an möglichen Gebieten und die vielen Kombinationen der partiellen Ableitungen geben noch weniger Hoffnung auf explizite Lösungsformeln als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- *Bei partiellen Differentialgleichungen soll man sich konzentrieren auf qualitative Aspekte wie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.*

Wenn bei einem Randwertproblem die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung geklärt ist, wäre der nächste Schritt, weitere Eigenschaften der Lösung herzuleiten, gegebenenfalls durch Approximierung der Lösung eventuell numerisch. Das letztere ist kein Teil dieser Vorlesung.

1.2 Randbedingungen

Bei der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = f(x)$$

hat man mehrere sinnvolle Möglichkeiten, durch Zusatzbedingungen die Eindeutigkeit einer Lösung zu bekommen:

1. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ für } x > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

hat genau eine Lösung, nämlich

$$u(x) = -\int_0^x \sinh(x-y)\, f(y)\, dy.$$

2. Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ für } x > 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

hat auch genau eine Lösung, nämlich

$$u(x) = \sinh(1-x) \int_0^x \frac{\sinh(y)}{\sinh(1)} f(y)\, dy + \sinh(x) \int_x^1 \frac{\sinh(1-y)}{\sinh(1)} f(y)\, dy.$$

Auch bei *inhomogenen* Randbedingungen wie $u(0) = 5$ statt $u(0) = 0$ findet man immer noch eindeutige Lösungen. Man addiere in dem Fall $5\cosh(x)$ zu der Lösung von (1.5), beziehungsweise $5\frac{\sinh(1-x)}{\sinh(1)}$ zu der Lösung von (1.6).

Welche Randbedingungen passen bei partiellen Differentialgleichungen?

Dazu betrachten wir einige Beispiele. Zuerst nochmals das Beispiel 1.2, wobei wir nun jedoch einen Punkt auf dem Rand weglassen.

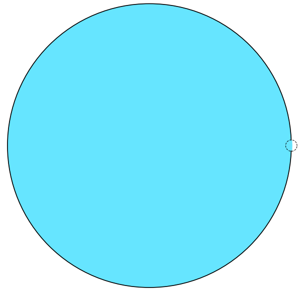

Abbildung 1.3: $B_1(0)$ in $\mathbb{R}^2$

Beispiel 1.4 *Für das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0. & \text{für } x \in \partial B_1(0) \setminus \{(1,0)\}, \end{cases} \tag{1.7}$$

findet man Lösungen

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) + c\frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1-1)^2 + x_2^2}.$$

Die Konstante c kann man in $\mathbb{R}$ beliebig wählen, und man findet unendlich viele Lösungen für (1.7).

Aufgabe 1.2 *Es gilt tatsächlich, dass*

$$\Delta \frac{1-x_1^2-x_2^2}{(x_1-1)^2+x_2^2} = 0 \text{ für } (x_1,x_2) \in \overline{B_1(0)} \setminus \{(1,0)\}\,.$$

Zeigen Sie dies.

Also wenn man die Randbedingung an einer Stelle weglässt, hat man wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht mehr die Eindeutigkeit. Man könnte vermuten, dass man generisch bei einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auch auf alle Randstellen die Funktionswerte vorschreiben soll, um genau eine Lösung zu finden.

> *Kann man vielleicht die Randbedingung $u(1,0)=0$ durch $\partial_{x_1}u(1,0)=0$ ersetzen?*

Die Bedingung $\partial_{x_1}u(1,0) = 0$ verlangt, dass u und diese Ableitung definiert sind. Wenn u (1.7) erfüllt und stetig auf $\overline{B_1(0)}$ sein sollte, dann kann man zeigen, dass nur die Funktion $u(x) = \frac{1}{4}(1-|x|^2)$ in Betracht kommt und $\partial_{x_1}u(-1,0) = \frac{1}{2}$ gilt.

Sind Lösungen immer stetig bis auf dem Rand?

Aufgabe 1.3 *Sei* $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to (-\pi,\pi)$ *das Argument und setze*

$$u(x,y) = \operatorname{Arg}(1+x+iy)\,.$$

1. *Begründen Sie, dass*

$$u \in C^\infty\left(\overline{B_1(0)} \setminus \{(-1,0)\}\right).$$

Die Funktion ist beschränkt, jedoch nicht stetig fortsetzbar auf $B_1(0)$.

2. *Ergänzen Sie das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \dots & \text{für } x^2+y^2<1,\\ u(\cos\varphi,\sin\varphi) = \dots & \text{für } \varphi \in (-\pi,\pi),\\ \lim_{x\downarrow -1} u(x,0) = \dots \end{cases}$$

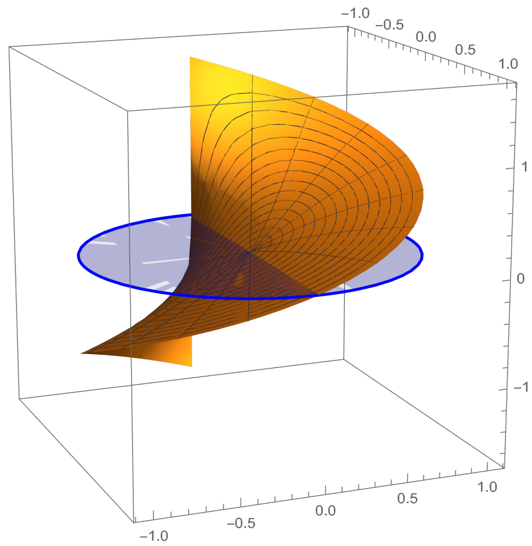

Abbildung 1.4: Die Funktion aus Aufgabe 1.3

Kann man vielleicht die Stetigkeit weglassen und die Randbedingung $\partial_{x_1}u(0,0) = 0$ durch das schwächere $\lim_{x_1\uparrow 1}\partial_{x_1}u(x_1,0) = 0$ ersetzen?

Beispiel 1.5 *Die letzte Bedingung reicht leider gar nicht für Eindeutigkeit und das sieht man mit der Funktion aus dem letzten Beispiel: Setze*

$$v(x_1,x_2) := \frac{1-x_1^2-x_2^2}{(x_1-1)^2+x_2^2}$$

Diese Funktion ist stetig auf $\overline{B_1(0)} \setminus 0$, aber nicht beschränkt bei $(1,0)$. Es gilt $\Delta v = 0$ in $B_1(0)$ und die Randbedingung in (1.7).

Definiere den Differentialoperator

$$L : C^1\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right) \to C^0\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$$

durch

$$(Lu)(x_1, x_2) = x_1 \partial_{x_2} u(x_1, x_2) - x_2 \partial_{x_1} u(x_1, x_2).$$

Diesen Differentialoperator kann man auch verwenden für Funktionen, die nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert sind, wenn man sich beschränkt auf die Stellen, wo die betreffende Funktion differenzierbar ist. Wir verwenden diesen Operator L für Funktionen, die differenzierbar sind auf $\overline{B_1(0)} \setminus \{(1,0)\}$.

Man kann zeigen, dass nicht nur auch

$$u(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) + cv(x_1, x_2)$$

für beliebige $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (1.7) ist, sondern, dass sogar

$$u(x_1, x_2) = \tfrac{1}{4}\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) + \sum_{k=0}^{4711} c_k \left(L^k v\right)(x_1, x_2).$$

für beliebige $c_i \in \mathbb{R}$ das Randwertproblem erfüllen. Außerdem kann man zeigen, dass $\left\{L^k v\right\}_{k=0}^{4711}$ ein unabhängiges System bildet. Da für die ungeraden Elemente $L^k v$, also für $k \in 2\mathbb{N}+1$, gilt, dass $\lim_{x_1 \downarrow -1} \partial_{x_1} L^k v(x_1, 0) = 0$, ist das Ersetzen von $u(1,0) = 0$ durch $\lim_{x_1 \downarrow -1} \partial_{x_1} u(x_1, 0) = 0$ nicht ausreichend, um Eindeutigkeit zu erreichen.

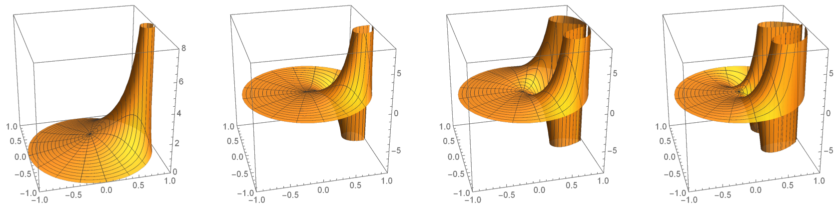

Abbildung 1.5: Die ersten 4 Funktionen aus der Reihe $v, Lv, L^2v, L^3v, \ldots$, die bei $(1,0)$ jeweils höhere Singularitäten aufweisen.

Aufgabe 1.4 *Sei $\Psi \in C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ mit $\Psi(-\pi) = \Psi(\pi)$ gegeben durch die konvergente Reihe*

$$\Psi(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\varphi}.$$

Zeigen Sie, dass $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi}$$

1. *konvergiert für $r \in [0,1]$, und das gilt $u \in C^2(B_1(0))$;*
2. *eine Lösung ist von*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \Psi(\varphi) & \text{für } \varphi \in [-\pi,\pi]. \end{cases}$$

Beispiel 1.6 *Als nächstes Randwertproblem betrachten wir auf*

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < \pi \text{ und } 0 < x_2 < \pi\right\}$$

das Randwertproblem:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) u(x_1,x_2) = 0 & \text{für } x \in Q, \\ u(x_1,x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial Q. \end{cases} \tag{1.8}$$

Offensichtlich ist $u(x_1,x_2) = 0$ eine Lösung. Wir finden jedoch auch, dass

$$u(x_1,x_2) = c\sin(x_1)\sin(x_2) \tag{1.9}$$

mit jeder beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist, obwohl auf dem ganzen Rand $u = 0$ vorgeschrieben ist. Der Unterschied mit vorhin ist ein Minus-Zeichen zwischen beiden Ableitungen.

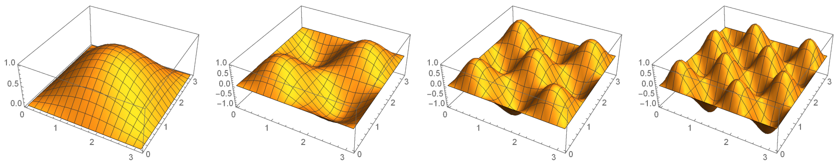

Abbildung 1.6: Links die Funktion aus (1.9) als auch noch drei andere Lösungen von (1.8). Raten Sie welche!

Beispiel 1.7 *Wiederum*

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < \pi \text{ und } 0 < x_2 < \pi\right\},$$

jedoch jetzt betrachten wir andere Randbedingungen, nämlich das Randwertproblem:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) u(x_1,x_2) = 0 & \text{für } (x_1,x_2) \in Q, \\ \text{links:} \quad u(0,x_2) = 0 & \text{für } x_2 \in [0,\pi], \\ \text{rechts:} \quad u(\pi,x_2) = 0 & \text{für } x_2 \in [0,\pi], \\ \text{unten:} \quad u(x_1,0) = 0 & \text{für } x_1 \in [0,\pi] \\ \text{unten:} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1,x_2)\right)_{|x_2=0} = 0 & \text{für } x_1 \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Oben stellen wir keine Randbedingung. Unten gibt es hier zwei unabhängige Randbedingungen. Wir werden später zeigen, dass dieses Problem nur $u = 0$ als Lösung hat, jedenfalls nachdem wir Lösungen vernünftig definiert haben.

- *Anscheinend sind bei partiellen Differentialgleichungen die Randbedingungen, die Eindeutigkeit garantieren, abhängig von einer Klassifizierung der betreffenden Differentialgleichung.*

Übrigens erscheint die Differentialgleichung aus den letzten beiden Beispielen bei einer schwingenden Saite. Dass man sich erstmal die partiellen Differentialgleichungen anschaut, die eine Anwendung haben, ist nicht nur, weil man nur an Anwendungen interessiert sein soll. Der eigentliche Grund für eine solche Einschränkung ist die Tatsache, dass jeder Typ seine Eigenarten hat. Man kann beliebig wilde Kombinationen von partiellen Ableitungen aufschreiben und versuchen dazu etwas zu sagen. Die Theorie von „Allem“ gibt es aber nicht.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer Bemerkung von Jacques-Louis Lions[3], der Alan Turing[4] wie folgt zitiert haben soll:

> *PDE's are made by God, the boundary conditions by the Devil!*

[3]Jacques-Louis Lions, 1928-2001, französischer Mathematiker mit wesentlichen Beiträgen zu Randbedingungen für partielle Differentialgleichungen

[4]Alan Mathison Turing, 1912-1954, englischer Mathematiker, der auf vielen Gebieten der Mathematik gearbeitet hat.