

Partielle Differentialgleichungen

Woche 2

Wiederholung und Neuanfang

2.1 Differentialgleichungen und klassische Lösungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine Funktion, nennen wir sie $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, der Form

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x), \dots, \nabla^m u(x)) = 0 \text{ mit } x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Hier ist Ω ein *Gebiet*, das heißt, eine offene zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^n , und

$$\nabla^k u = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} u \right\}_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}}.$$

Für $k = 1$ bekommt man den Gradienten und für $k = 2$ schreibt man

$$\nabla^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u \end{pmatrix}.$$

Man bemerke, dass ∇^2 nicht dasselbe ist wie $\nabla \cdot \nabla$. Die höchste Ableitung, die in (2.1) erscheint, nennt man die *Ordnung der Differentialgleichung*.

Oft hat eine Variable eine besondere Rolle, nämlich diejenige, die in dem Modell die Zeit darstellen soll, und diese wird üblicherweise mit t notiert. Für die Ableitung verwendet man neben $\frac{\partial}{\partial t}$ auch ∂_t . Auch verwendet man manchmal den Multiindex¹ und schreibt $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$, $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ oder ∂_x^α .

Die Frage, ob und wenn ja, welche Lösungen eine solche Differentialgleichung hat, lässt sich meistens nur sinnvoll beantworten, wenn passende Rand- oder Anfangswerte gegeben werden. Ein Theorem wie das von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen,

¹Wir haben hier die *Multiindex*-Notation verwendet: $\alpha \in \mathbb{N}^n$ bedeutet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$ und man setzt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Man schreibt außerdem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

gibt es nicht allgemein für partielle Differentialgleichungen. In einer Vorlesung zu partiellen Differentialgleichungen wird man dann auch nicht versuchen, die Theorie für alles zu bringen, sondern man wird sich mit den Typen, die in den Anwendungen auftauchen, beschäftigen. Wir werden dann auch, bevor wir näher auf die verschiedenen Typen eingehen, im nächsten Kapitel erst einige dieser Anwendungen vorstellen.

Bevor wir mit einigen Modellen anfangen, sollte man etwas zum Begriff „Lösung“ sagen.

Definition 2.1 Man nennt eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine klassische Lösung von der Differentialgleichung m -ter Ordnung in (2.1), wenn folgendes gilt:

- $u \in C^m(\Omega)$, das heißt alle Ableitungen bis Ordnung m existieren und sind stetig auf Ω , und
- u erfüllt die Gleichung (2.1) für alle $x \in \Omega$.

Bemerkung 2.1.1 Soll die Lösung zusätzlich Randbedingungen erfüllen, dann reicht die Menge $C^m(\Omega)$ nicht. Um Randwerte zu betrachten wird Stetigkeit oder sogar Differenzierbarkeit auf $\bar{\Omega}$, also inklusive des Randes, notwendig sein. Mehr dazu findet man in dem nächsten Abschnitt.

Aufgabe 2.1 Wenn $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ radialsymmetrisch ist, also $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, dann gilt

$$\Delta u(x) = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r) \right)_{r=|x|}.$$

Wir definieren $\tilde{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{u}(r) = \begin{cases} a + \gamma(1 - r^2) & \text{für } r \leq 1, \\ a r^{-1} & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

1. Für welche Konstanten a und γ ist \tilde{u} eine Lösung von

$$-r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r) \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \in (0, 1] \\ 0 & \text{für } r \in (1, \infty) \end{cases} ?$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung kann man als System schreiben. Da wird dann eine Lösung definiert, wenn $\tilde{u}, \tilde{u}' \in C^1(\mathbb{R}^+ \setminus I)$, bei der I eine Menge isolierter Punkte ist, an der die DGL nicht unbedingt erfüllt sein muss.

2. Ist $u(x) = \tilde{u}(|x|)$ für diese a und γ eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \end{cases} ?$$

Hier ist $\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}$ definiert als 1, wenn die Bedingung $x \leq 1$ erfüllt ist, und sonst als 0.

2.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

2.2.1 Stetigkeit

Wie war das noch mit gleichmäßig und gleichgradig?

- Eine Funktion $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $x \in A$, wenn: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_{\varepsilon, x} > 0$ derart, dass für alle $y \in A$ mit $|x - y| < \delta_{\varepsilon, x}$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- Eine Funktion $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig auf A , wenn sie stetig ist in jedem $x \in A$.

- Eine Funktion $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf A , wenn:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass

für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Wenn A kompakt ist, dann ist jede stetige Funktion auf A gleichmäßig stetig. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Beschränkt bedeutet: es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ mit $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq M\}$.

- Sei A kompakt. Dann nennt man eine Familie von Funktionen $\mathcal{F} = \{f_i : A \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ gleichgradig stetig, wenn

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass

für alle $f_i \in \mathcal{F}$ und für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$.

2.2.2 Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen

Wir wiederholen die Definitionen von $C^m(\Omega)$ und die einiger verwandter Funktionenräume.

Definition 2.2 Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^n . $C^m(\Omega)$ ist der Vektorraum aller Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die m -mal differenzierbar sind und alle zugehörigen Ableitungen, das heißt alle Ableitungen von Ordnung kleiner gleich m , sind stetig.

Bemerkung 2.2.1 Man definiert $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$.

Wenn $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ m -mal differenzierbar ist, sagt man auch $u \in C^m(\Omega)$. Nur wenn man explizit zeigen möchte, dass man Funktionen mit Werten in \mathbb{R}^k hat, wird $C^m(\Omega; \mathbb{R}^k)$ geschrieben.

Auch begegnet man $C^m(\bar{\Omega})$. Die Definitionen dieser Räume sind etwas weniger geradeaus.

Definition 2.3 Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^n .

1. Man definiert $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$ als den Vektorraum aller stetigen Funktionen $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Für $m \geq 1$ wird $C^m(\bar{\Omega})$ iterativ definiert als der Vektorraum aller stetigen Funktionen $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

- $u|_\Omega \in C^m(\Omega)$, ($u|_\Omega$ ist die Einschränkung von u auf Ω) und
- es gibt $g_1, \dots, g_n \in C^{m-1}(\bar{\Omega})$ mit $g_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$ für $x \in \Omega$.

Bemerkung 2.3.1 Durch diese Definition haben wir das Problem vom Differenzieren am Rande vermieden. Im Nachhinein, wenn $u \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt, schreiben wir wieder $\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) := g_i(x)$ auf $\bar{\Omega}$. Ähnliches machen wir mit höheren Ableitungen.

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, ist $\bar{\Omega}$ kompakt und für $u \in C^0(\bar{\Omega})$ existiert $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$. Für beschränkte Gebiete Ω und $u \in C^m(\bar{\Omega})$ ist $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$ durch

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{k=0}^m \sup_{x \in \Omega} |\nabla^k u(x)|, \quad (2.2)$$

also wohldefiniert. Für $|\cdot|$ nimmt man die euklidische Norm in \mathbb{R}^{n^k} . Weil diese hier jedoch jeweils nur endlich viele Komponenten hat, kann man äquivalente Normen finden:

$$\max_{1 \leq i \leq \ell} |\xi_i| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_\ell^2} \leq \sqrt{\ell} \max_{1 \leq i \leq \ell} |\xi_i| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^\ell.$$

So wird $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$ ein normierter Vektorraum.

Bemerkung 2.3.2 Wenn klar ist, welches Gebiet gemeint ist, schreibt man auch

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \|u\|_\infty.$$

Übrigens ist $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm für den Raum $L^\infty(\Omega)$ der beschränkten Funktionen auf Ω .

Bemerkung 2.3.3 Auf nicht abgeschlossenen oder unbeschränkten Gebieten gibt es unbeschränkte stetige Funktionen. So wie $C^m(\Omega)$ hier definiert ist, kann man (2.2) also nicht als Norm für $C^m(\Omega)$ verwenden. Das gleiche trifft zu für $C^m(\bar{\Omega})$ mit Ω unbeschränkt.

2.2.3 Vollständigkeit bei $C(\bar{\Omega})$

Theorem 2.4 (Arzelà-Ascoli) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und sei $\{f_n \in C(\bar{\Omega})\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte, gleichgradig stetige Folge von Funktionen. Dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Bemerkung 2.4.1 Die Folge $\{f_n \in C(\bar{\Omega})\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig beschränkt, wenn es $M \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$|f_n(x)| \leq M \text{ für alle } x \in \Omega \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$ ein Banachraum.

Bemerkung 2.5.1 Ein normierter Vektorraum heißt Banachraum, wenn jede Cauchy-Folge² konvergent im Raum ist.

Beweis. Wir betrachten vorerst den Fall $m = 0$. Sei $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0(\bar{\Omega})})$. Dann gilt:

1. Der Grenzwert $\tilde{u}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ existiert für jedes $x \in \bar{\Omega}$, denn $\{u_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und \mathbb{R} ist vollständig.
2. Gleichmäßige Konvergenz: Sei $N_\varepsilon > 0$ derart, dass $\|u_k - u_\ell\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $k, \ell > N_\varepsilon$. Für jedes x gibt es $N_{x,\varepsilon}$ derart, dass $|u_\ell(x) - \tilde{u}(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $\ell > N_{x,\varepsilon}$. Man nehme nun $\ell_x = \max(N_{x,\varepsilon}, N_\varepsilon) + 1$ und finde

$$|u_k(x) - \tilde{u}(x)| \leq |u_k(x) - u_{\ell_x}(x)| + |u_{\ell_x}(x) - \tilde{u}(x)| < \varepsilon.$$

Weil dies für beliebiges x gilt, folgt $k \geq N_\varepsilon$ impliziert $\|u_k - \tilde{u}\|_\infty < \varepsilon$. Also konvergiert $\{u_k\}$ nicht nur punktweise, sondern sogar gleichmäßig nach \tilde{u} .

3. Der Limes \tilde{u} ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$, nehme k genügend groß, so dass $\|\tilde{u} - u_k\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$ und nehme $\delta_{\varepsilon,k} > 0$ derart, dass

²Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ ist eine Cauchy-Folge, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : k, \ell > m \implies \|u_k - u_\ell\| < \varepsilon.$$

$|x - y| < \delta_{\varepsilon, k}$ impliziert $|u_k(x) - u_k(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Es folgt

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq |\tilde{u}(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y) - \tilde{u}(y)| < \varepsilon.$$

Es gibt also $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ derart, dass $\|u_k - \tilde{u}\|_\infty \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Die Aussage für $m = 0$ ist bewiesen.

Sei nun $m \geq 1$ und $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$. Aus dem ersten Teil dieses Beweises wissen wir, dass es für jede Ableitung $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$ mit $|\alpha| \leq m$ eine stetige Funktion $g_\alpha \in C^0(\bar{\Omega})$ gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u_k - g_\alpha \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0.$$

Sei nun $a \in \Omega$ und nehme $h > 0$ derart, dass

$$[a - he_i, a + he_i] \subset \Omega.$$

Weil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u_k - g_i \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - g_0\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0,$$

gilt, folgt gleichmäßig für $t \in [-h, h]$, dass

$$u_k(a + te_i) - u_k(a) \rightarrow g_0(a + te_i) - g_0(a)$$

und

$$u_k(a + te_i) - u_k(a) = \int_{[a, a+te_i]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) dx_i \rightarrow \int_{[a, a+te_i]} g_i(x) dx_i.$$

Also gilt

$$g_0(a + te_i) = g_0(a) + \int_{[a, a+te_i]} g_i(x) dx_i \text{ für } t \in [-h, h].$$

Man findet, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_0(a) = \left(\frac{\partial}{\partial t} g_0(a + te_i) \right)_{|t=0} = g_i(a).$$

Ähnliches gilt für jede Ableitung und die Kombination ergibt $g_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \tilde{u}$, das heißt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - \tilde{u}\|_{C^m(\bar{\Omega})} = 0,$$

oder anders gesagt, $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine konvergente Folge in $C^m(\bar{\Omega})$. ■

Bemerkung 2.5.2 Man begegnet auch $C^{m, \gamma}(\bar{\Omega})$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in (0, 1]$:

$$C^{m, \gamma}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^m(\bar{\Omega}); [(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha u]_\gamma < \infty \text{ für } |\alpha| = m \right\},$$

wobei $[\cdot]_\gamma$ eine Seminorm ist, definiert durch

$$[u]_\gamma = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Man nennt $C^{0, \gamma}(\bar{\Omega})$ mit $\gamma \in (0, 1)$ die zum Exponenten γ Hölder³-stetige Funktionen.

³Otto Ludwig Hölder, Stuttgart 1859 - Leipzig 1937

Die Vektorräume $C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$ werden Hölder-Räume genannt. Die Norm für diese Räume wird wie folgt definiert:

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \sup_{|\alpha|=m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u \right]_\gamma.$$

Im Fall, dass $m = 0$ und $\gamma = 1$, also $C^{0,1}(\bar{\Omega})$, bekommt man die Lipschitz⁴-stetigen Funktionen auf $\bar{\Omega}$.

Aufgabe 2.2 Die Funktion $u \in C(\bar{B}_1(0))$, definiert durch

$$u(x, y) = (1+x) \log((1+x)^2 + y^2) - 2y \arctan\left(\frac{y}{1+x}\right),$$

für $(x, y) \in B_1(0)$, erfüllt $\Delta u(x, y) = 0$ in $B_1(0)$.

In welchen Räumen $C^{k,\gamma}(\bar{B}_1(0))$ liegt sie?

Schlussendlich gibt es noch einige Funktionsmengen, die sich mit besonderem Verhalten am Rand beschäftigen.

Definition 2.6 Man definiert $C_0^m(\bar{\Omega})$ als die Teilmenge von $C^m(\bar{\Omega})$ der Funktionen u mit $\nabla^k u(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $k \leq m$.

Bemerkung 2.6.1 Sei Ω beschränkt. Dann ist $C_0^m(\bar{\Omega})$, als eine abgeschlossene Teilmenge von $C^m(\bar{\Omega})$, bezüglich der $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$ -Norm ein Banachraum.

⁴Rudolf Otto Sigmund Lipschitz, Bönkein 1832 - Bonn 1905

Definition 2.7 Man definiert $C_0^\infty(\Omega)$ als die Teilmenge der Funktionen $u \in C^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger⁵ innerhalb von Ω .

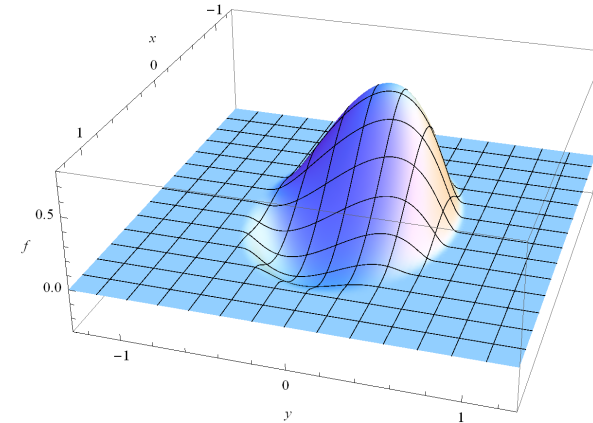


Abbildung 2.1: Darstellung der Funktion aus Beispiel 2.8.

Beispiel 2.8 Man kann sich fragen, ob die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ nicht leer ist. Hier ist ein Beispiel einer solchen Funktion. Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 + 2y^2 \geq 1, \\ (1+x^2+2x-3y) \exp\left(\frac{-1}{1-x^2-2y^2}\right) & \text{sonst,} \end{cases}$$

⁵Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C(A)$. Der Träger von u ist die abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n definiert durch:

$$\text{support}(u) = \overline{\{x \in A; u(x) \neq 0\}}.$$

hat einen kompakten Träger, ist beliebig oft stetig differenzierbar und liegt also in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dass sie beliebig oft differenzierbar ist, findet man mit den Standardableitungsregeln, wenn $x^2 + 2y^2 \neq 1$. Weil $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^n e^t = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, folgt $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 0$ für $x^2 + 2y^2 = 1$. Durch Induktion findet man, dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = 0 \text{ für } x^2 + 2y^2 = 1$$

und dass die Ableitungen $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f$ alle stetig sind.

Gelegentlich findet man auch $C_c^m(\bar{\Omega})$ und $C_c^\infty(\bar{\Omega})$. Mit $C_c^m(\bar{\Omega})$ meint man die Teilmenge der Funktionen $u \in C^m(\bar{\Omega})$, beziehungsweise $C_c^\infty(\bar{\Omega})$, mit kompaktem Träger.

2.3 Intermezzo zu glatten Rändern

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man neben dieser Differentialgleichung oft Anfangs- oder Randwerte, aber die sollen nur an einigen Punkten erfüllt sein. Bei partiellen Differentialgleichungen in n Dimensionen werden Anfangs- oder Randwertbedingungen typischerweise auf $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert. Häufig hat man zu tun mit Gebieten, die Ecken oder Kanten haben. Solche Gebiete sorgen für spezifische Probleme, die kaum in einer Anfängervorlesung angesprochen werden können.

Beispiel 2.9 Wir definieren die Funktion u_α für $\alpha \in (0, 2\pi)$ mit Hilfe von Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$u_\alpha(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right)$$

für $r \in [0, 1]$ und $\varphi \in [0, \alpha]$. Der Differentialoperator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ in Polarkoordinaten wird $\Delta = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2$ und es folgt

$$\begin{aligned} (\Delta u_\alpha)(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \\ &= \left(\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \frac{1}{r} \partial_r \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) + \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \partial_\varphi^2 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} u_\alpha(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right), \\ u_\alpha(x, 0) &= u_\alpha(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u_\alpha = 0 & \text{in } \Omega_\alpha, \\ u_\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) & \text{auf } \partial\Omega_\alpha. \end{cases}$$

Hier ist $\Omega_\alpha = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \alpha\}$ und $\partial\Omega_\alpha$ der Rand des Gebietes.

Trotz der Tatsache, dass der Sinus eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, ist die Lösung nicht unbedingt differenzierbar. Die Differenzierbarkeit in 0 hängt ab von der Öffnung α :

$$(\partial_r u_\alpha)(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right)$$

und nur für $\alpha \leq \pi$ existiert $(\partial_v u_\alpha)(0)$ für $v = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \end{pmatrix}$.

Skizzen zu diesen Funktionen u_α findet man in Abbildung 2.2.

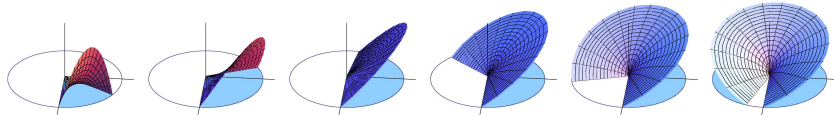


Abbildung 2.2: Funktionen u_α mit $\alpha = 1, 2, \dots, 6$.

Das Beispiel zeigt, dass in den Ecken des Gebietes eine Lösung nicht unbedingt differenzierbar sein muss. Es bedeutet auch, dass man, um Ergebnisse genau formulieren zu können, die Regularität des Randes genau klassifizieren soll.

Für den Rand des Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibt man $\partial\Omega$. Dieser Rand ist definiert durch

$$\partial\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } \begin{array}{l} B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ und} \\ B_\varepsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset \end{array} \right\}.$$

Definition 2.10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Man sagt $\partial\Omega \in C^m$, wenn es $M \in \mathbb{N}^+$ gibt mit für $1 \leq i \leq M$:

- kartesische Koordinatensysteme $\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}\}$,
- offene Blöcke $B^{(i)} = (a_1^{(i)}, b_1^{(i)}) \times \dots \times (a_n^{(i)}, b_n^{(i)})$,
- Funktionen $\psi^{(i)} \in C^m \left([a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times \dots \times [a_{n-1}^{(i)}, b_{n-1}^{(i)}] \right)$,

und diese sind derart, dass folgendes gilt:

1. $\partial\Omega$ wird überdeckt, also $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^M B^{(i)}$, und

2. $\Omega \cap B^{(i)} = \left\{ y \in B^{(i)}; y_n^{(i)} > \psi^{(i)} \left(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)} \right) \right\}$.

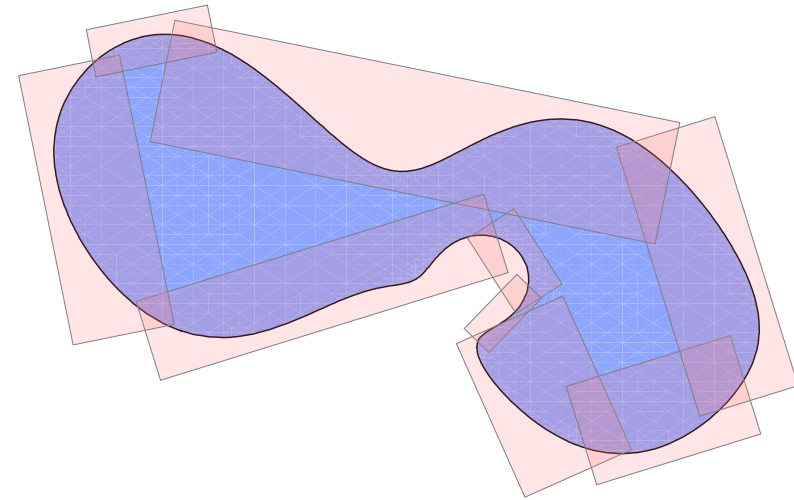


Abbildung 2.3: Mit Hilfe von lokalen Koordinaten, Blöcke $B^{(i)}$ und Funktionen $\psi^{(i)}$ wird die Regularität von $\partial\Omega$ definiert.

Bemerkung 2.10.1 Man kann diese Definition anpassen für $\partial\Omega \in C^{m,\gamma}$.

Bemerkung 2.10.2 Wenn Ω unbeschränkt ist, soll dies gelten mit lokal endlich vielen offenen Blöcken. Das heißt, es darf abzählbar unendlich viele Blöcke geben ($M = \infty$), jedoch soll man auf jedem Kompaktum nur endlich viele verwenden müssen. Außerdem sollen die C^m -Normen der Funktionen $\psi^{(i)}$ gleichmäßig beschränkt sein.

Die Blöcke können also rotiert sein bezüglich der Standardbasis. Man nimmt sie offen, damit diese Blöcke sich notwendigerweise überlappen müssen und sich keine Singularitäten

bei der Verknüpfung verstecken können. Aus der zweiten Bedingung folgt außerdem, dass das Gebiet Ω mit $\partial\Omega \in C^0$ lokal immer an einer Seite des Randes liegt. Ein typisches Bild findet man in Abbildung 2.3.

Beispiel 2.11 Für einen (Hyper)Kubus $\Omega = (0, 1)^n$ in \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$ gilt $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

Beispiel 2.12 Für eine (Hyper)Kugel $\Omega = B_1(0)$ in \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$ gilt $\partial\Omega \in C^\infty$. Man braucht mindestens $n + 1$ Blöcke $B^{(i)}$.

Bemerkung 2.12.1 Nicht jedes Gebiet hat einen C^0 -Rand. Siehe Abbildung 2.4.

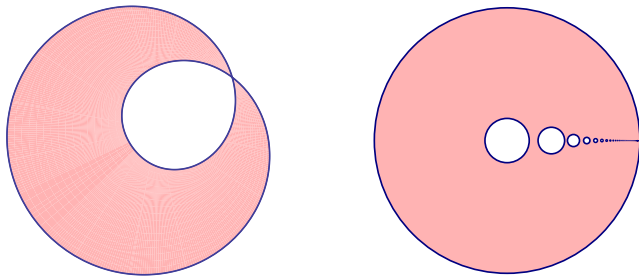


Abbildung 2.4: Zwei Gebiete, die nicht unsere C^0 -Bedingung erfüllen. Beim „Doppelspitz“ links liegt Ω nicht an einer Seite vom Rand. Rechts reichen nicht endlich viele Blöcke.

Aufgabe 2.3 Welcher Rand ist glatt? Bestimmen Sie für welche Koeffizienten $\partial\Omega \in C^{k,\gamma}$ gilt.

$$1. \partial\Omega = \{(\sin(t) \cos(t), \sin(t)^2); t \in [0, \pi]\}.$$

$$2. \partial\Omega = \{(\sin(t) \cos(t), \sin(t)); t \in [0, \pi]\}.$$

$$3. \partial\Omega = \{(\sin(t)^2 \cos(t), \sin(t)^3); t \in [0, \pi]\}.$$

Hinweis: bei einer gilt $\partial\Omega \in C^{1,\frac{1}{2}}$.

Skizzen dieser Gebiete findet man in Abbildung 2.5.

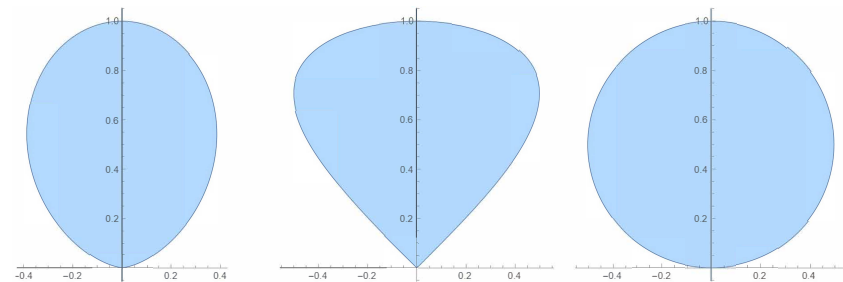


Abbildung 2.5: Die Gebiete aus Aufgabe 2.3, aber nicht in der richtigen Folge

Noch etwas müsste man festlegen. Wenn man eine Funktion hat, die nur auf dem Rand definiert ist, wann kann man eine solche Funktion differenzierbar nennen?

Definition 2.13 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \in C^k$ und sei $m \leq k$. Sei $\{\psi^{(i)}\}$ eine Menge endlich vieler Funktionen wie in Definition 2.10. Dann nennt man $u \in C^m(\partial\Omega)$, wenn

$$\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right) \mapsto u\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}, \psi^{(i)}\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right)\right) \in C^m,$$

für jedes dieser $\psi^{(i)}$.

Bemerkung 2.13.1 Man kann zeigen, dass diese Definition nicht abhängt von den gewählten Parametrisierungen $\{\psi^{(i)}\}$.

Bemerkung 2.13.2 Die Definition wird angepasst, wenn man u nur auf einen Teil des Randes $\Gamma \subset \partial\Omega$ als $C^m(\Gamma)$ beschreiben möchte.

2.4 Integration in \mathbb{R}^n

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist und $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann sollte man seit der Vorlesung Analysis 2 wissen wie

$$\int_{\Omega} u(x) dx$$

definiert ist. Spätestens weiß man nach dem Satz von Fubini-Tonelli, dass man ein solches Integral vor dem Berechnen als wiederholtes Integral schreiben kann, jedenfalls, wenn man Ω schön zerlegen kann. Schön heißt hier zum Beispiel, dass man die Menge wie folgt schreiben kann:

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \begin{aligned} &X_{1,u} < x_1 < X_{1,o}, \\ &X_{2,u}(x_1) < x_2 < X_{2,o}(x_1), \\ &X_{3,u}(x_1, x_2) < x_3 < X_{3,o}(x_1, x_2), \\ &\dots \\ &X_{n,u}(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n < X_{n,o}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \right\},$$

für irgendwelche genügend nette Funktionen $X_{i,u}, X_{i,o}$.

Mit dem Satz von Fubini-Tonelli folgt

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \int_{X_{1,u}}^{X_{1,o}} \int_{X_{2,u}(x_1)}^{X_{2,o}(x_1)} \dots \int_{X_{n,u}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{X_{n,o}(x_1, \dots, x_{n-1})} u(x) dx_n \dots dx_1.$$

Ob man ein solches Integral tatsächlich explizit berechnen kann, ist jedoch wieder eine ganz andere Frage.

Beispiel 2.14 Gefragt wird

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 < 2} x_1^2 e^{-x_2} dx.$$

Das Gebiet kann man wie folgt umschreiben:

$$\{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 2\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; |x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2 - x_1^2} \right\}.$$

Fubini-Tonelli ergibt

$$\begin{aligned} \int_{x_1^2 + x_2^2 < 2} x_1^2 e^{-x_2} dx &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x_1^2}}^{\sqrt{2-x_1^2}} x_1^2 e^{-x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x_1^2 \left[-e^{-x_2} \right]_{-\sqrt{2-x_1^2}}^{\sqrt{2-x_1^2}} dx_1 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x_1^2 \left(-e^{-\sqrt{2-x_1^2}} + e^{\sqrt{2-x_1^2}} \right) dx_1 \end{aligned}$$

und dann hört hier der Spaß vom expliziten Rechnen auf.

Definition 2.15 Das Volumen von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$\text{Volumen}(\Omega) := \int_{\Omega} 1 dx.$$

In \mathbb{R}^2 wird das Volumen meistens Flächeninhalt genannt.

Aufgabe 2.4 • Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < y\sqrt{1-y^2} \right\}.$$

• Berechnen Sie das Volumen von

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < z \right\}.$$

2.5 Integration über einen Rand

In der Analysis Vorlesung lernt man

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Eine ähnliche Formel gibt es für mehrdimensionale Integrale. Bevor wir da etwas zu sagen können, folgt eine kurze Beschreibung zu Integralen über Mannigfaltigkeiten.

2.5.1 Kurvenlänge

Die Länge einer Geraden zwischen x und y in \mathbb{R}^n findet man mittels

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Wenn die Kurve $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ist, kann man deren Länge berechnen durch eine Approximation mit

Polygonzügen:

$$\begin{aligned} \ell(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| k\left(a + \frac{i+1}{n}(b-a)\right) - k\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| k'\left(a + \frac{i+1}{n}(b-a)\right) \right\| \frac{b-a}{n} = \int_a^b |k'(t)| dt. \end{aligned}$$

Für eine Kurve, die parametrisiert wird durch $x \mapsto (x, y(x))$, findet man

$$\ell(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

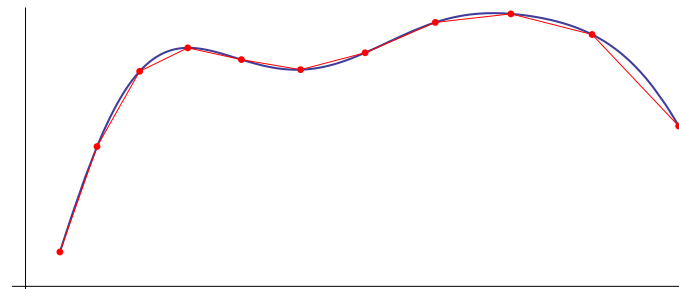


Abbildung 2.6: Bogenlänge wird approximiert mittels Polygonzug

2.5.2 Flächeninhalt einer Mannigfaltigkeit

Den $(n-1)$ -dimensionalen Flächeninhalt von dem Teil der Hyperfläche in \mathbb{R}^n , der beschrieben wird durch

$$F = \{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \theta_3 v_3 + \dots + \theta_{n-1} v_{n-1}; 0 \leq \theta_i \leq 1\}$$

mit $v_i \in \mathbb{R}^n$, kann man wie folgt finden. Man soll sich erinnern, dass das Volumen des Parallelepipedes P in \mathbb{R}^n , aufgespannt durch die Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w\}$, das heißt also

$$P = \{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \dots + \theta_{n-1} v_{n-1} + \theta_n w; 0 \leq \theta_i \leq 1\},$$

durch die Determinante gegeben wird:

$$\text{Vol}(P) = |\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w)|.$$

Nehmen wir für w einen Normalenvektor bezüglich v_1, \dots, v_{n-1} , so haben wir

$$\text{Flächeninhalt}(F) = \frac{\text{Vol}(P)}{\|w\|}.$$

Im Fall, dass

$$\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

nehmen wir

$$w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir finden direkt, dass $w \perp v_i$, und es folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(F) &= \frac{|\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w)|}{\|w\|} = \\ &= \frac{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}{\sqrt{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}} = \sqrt{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Wenn die $(n-1)$ -dimensionale Oberfläche in \mathbb{R}^n parametrisiert wird durch

$$P : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$$

mit

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, p(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (2.3)$$

und es gilt $p \in C^1(\bar{\Omega})$, dann kann man auch hier approximieren mittels einer Verteilung von G in Hyperquadern $\{Q_i^\varepsilon\}_{i=1}^{m_\varepsilon}$ mit Eckpunkten $x^{\varepsilon, i}$ und einer Linearisierung ℓ_i^ε von p auf diesen Hyperquadern:

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(p(\Omega)) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_i^{m_\varepsilon} \text{Flächeninhalt}(\ell_i^\varepsilon(Q_i^\varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_i^{m_\varepsilon} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}(x^{\varepsilon, i})\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial p}{\partial x_{n-1}}(x^{\varepsilon, i})\right)^2} \\ &= \int_G \sqrt{1 + |\nabla p(x)|^2} dx. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.15.1 Für $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det(v_1, v_2, w) = (v_1 \times v_2) \cdot w.$$

Wenn $w = \nu$ ein Normalenvektor zu v_1, v_2 ist, folgt

$$\frac{|\det(v_1, v_2, \nu)|}{\|\nu\|} = \frac{|(v_1 \times v_2) \cdot \nu|}{\|\nu\|} = \|v_1 \times v_2\|$$

und man findet

$$\text{Flächeninhalt}(\{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2; 0 \leq \theta_i \leq 1\}) = \|v_1 \times v_2\|. \quad (2.4)$$

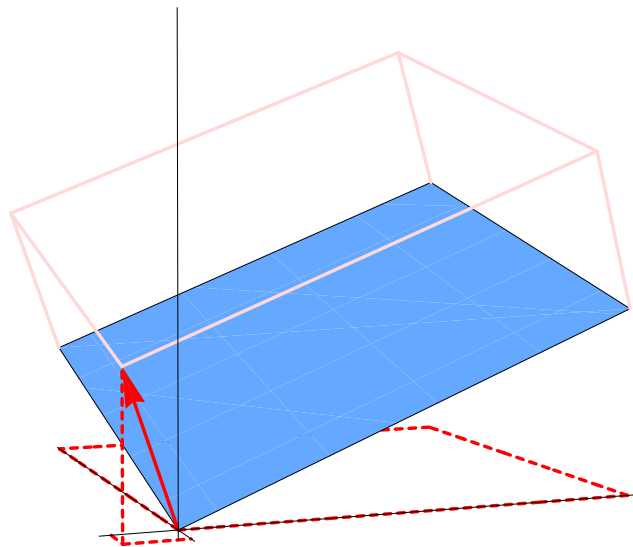


Abbildung 2.7: In drei Dimensionen die Fläche aus (2.4) und $\nu = v_1 \times v_2$.

2.5.3 Randintegrale

Für ein n -dimensionales Gebiet Ω , bei dem man den Rand $\partial\Omega$ in endlich viele Teile $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$ auseinandernehmen kann,

die einzeln, wie oben beschrieben, auf C^1 -Art parametrisiert werden können, definiert man das Randintegral wie folgt:

Definition 2.16 Sei $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$ mit $\Gamma_i^\circ \cap \Gamma_j^\circ = \emptyset$ und nehme an $\Gamma_i = P^i(G_i)$ mit $P^i \in C^1(\overline{G_i})$ wie in (2.3). Dann setzt man

$$\int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma_x := \sum_{i=1}^k \int_{G_i} g(P^i(y^i)) \sqrt{1 + |\nabla p_i(y^i)|^2} dy^i. \quad (2.5)$$

Das rechte Integral in (2.5) ist ein $(n-1)$ -dimensionales Integral und $y^i = (y_1^i, \dots, y_{n-1}^i)$ sind die Koordinaten in einem zu G_i passenden lokalen kartesischen Koordinatensystem mit $x = P^i(y^i)$. Man sollte zeigen, dass die Definition dieses Randintegrals unabhängig ist von der gewählten Zerlegung des Randes und der Parametrisierung dieser Teile. Ein solcher Beweis führt hier zu weit und wir verweisen auf die Analysis 3 Vorlesung. Mehr allgemeine Parametrisierungen und die Anwendung beim Integrieren finden Sie in Definition 2.23.

Aufgabe 2.5 Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z = 4 - 2(x^2 + y^2)\}.$$

2.6 Partielle Integration in \mathbb{R}^n

Lemma 2.17 Sei Ω ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n mit C^1 Rand $\partial\Omega$. Seien $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_i d\sigma_x - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx.$$

Hier ist ν_i die i -te Komponente des auswendig zeigenden Einheitsnormalenvektors ν an der Stelle $x \in \partial\Omega$.

Beweis. Dieser Beweis wird in zwei Dimensionen skizziert. In höheren Dimensionen funktioniert es ähnlich.

1) Wir nehmen an, dass wir die Integrale über $\partial\Omega$ und Ω mit Integralen über einen oder mehrere Polygonzüge beziehungsweise über das Innere dieser Polygonzüge approximieren dürfen.

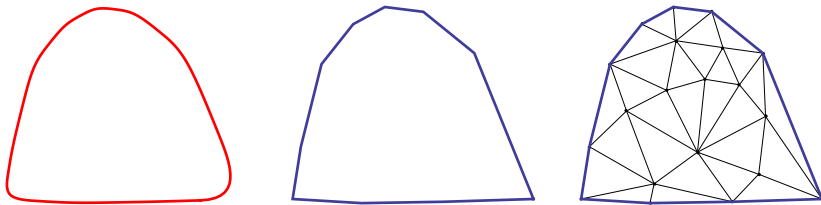


Abbildung 2.8: Approximieren und Zerlegen

2) Das Innere eines Polygonzugs kann man auffüllen mit Dreiecken. Dann reicht es, um die Aussage zu beweisen für Dreiecke, denn für $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \bar{D}_k$, mit D_k paarweise disjunkte offene Dreiecke, gilt

$$\int_{\Omega} h(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{D_k} h(x) dx \quad (2.6)$$

und

$$\int_{\partial\Omega} h(x) \nu_i d\sigma_x = \sum_{k=1}^m \int_{\partial D_k} h(x) \nu_i d\sigma_x. \quad (2.7)$$

Die Aussage in (2.6) folgt direkt; für die zweite muss man bemerken, dass alle inneren Randintegrale gegeneinander wegfallen durch das gegengesetzte Vorzeichen des äußeren Normalenvektors ν .

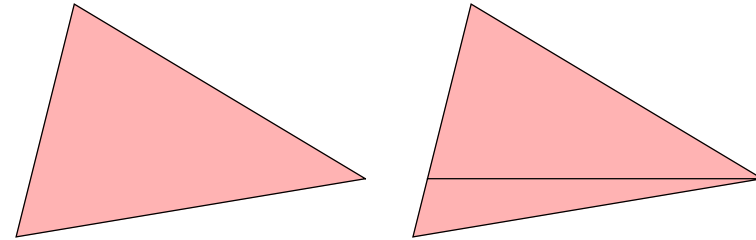


Abbildung 2.9: Eine triviale Zerlegung

3) Jedes Dreieck, das nicht eine Seite parallel an der i -Achse hat, kann man in zwei Dreiecke zerlegen, die beide eine Seite parallel an der i -Achse haben. Einfachheitshalber nehmen wir an $i = 1$.

4) Sei $D = \{(x, y); \ell_l(x_2) < x_1 < \ell_r(x_2) \text{ und } x_{2,u} < x_2 < x_{2,o}\}$ mit ℓ_l und ℓ_r zwei affine Abbildungen.

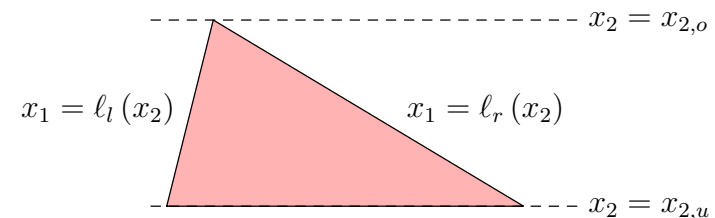


Abbildung 2.10: Ein Standard Dreieck

Mit Fubini-Tonelli finden wir

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} g(x) dx &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_{2,o}} \left(\int_{x_1=\ell_l(x_2)}^{\ell_r(x_2)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} g(x) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_{2,o}} \left([f(x) g(x)]_{x_1=\ell_l(x_2)}^{x_1=\ell_r(x_2)} - \int_{x_1=\ell_l(x_2)}^{\ell_r(x_2)} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_{2,o}} \left(f(\ell_r(x_2), x_2) g(\ell_r(x_2), x_2) \right. \\ &\quad \left. - f(\ell_l(x_2), x_2) g(\ell_l(x_2), x_2) \right) dx_2 \\ &\quad - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx \\ &= \int_{\partial D} f(x) g(x) \nu_1 d\sigma_x - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx. \end{aligned}$$

Man soll bemerken, dass folgendes gilt:

links: $\nu_1 d\sigma_x = -dx_2$,
 rechts: $\nu_1 d\sigma_x = dx_2$,
 unten: $\nu_1 d\sigma_x = 0$.

■

Theorem 2.18 (Gauß) Sei Ω ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n mit C^1 Rand $\partial\Omega$. Seien $F \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $g \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot F)(x) g(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu g(x) d\sigma_x - \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla g(x) dx.$$

Beweis. Man wende Lemma 2.17 an mit $f = F_i$ für $i = 1, \dots, n$ und addiere die Ergebnisse. ■

Weil $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, oder genauer gesagt

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad},$$

folgt aus Theorem 2.18, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u) w dx &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \nabla u) w dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu w dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Korollar 2.19 (Green) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u, w \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} (\Delta u w - u \Delta w) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} w - u \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\sigma_x.$$

Beweis. Man verwende (2.8) für $\Delta u w$ und für $u \Delta w$, und bemerke, dass $\nabla u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$. ■

Aufgabe 2.6 Berechnen Sie

$$\int_{B_1(0)} \Delta \left((1 - x^2 - y^2) e^{\sin(x^2+y^2)} \right) dx dy.$$

2.7 Integrale und Transformationen

Möchte man die Symmetrie eines Modells ausnutzen, dann kann es bequem sein, dass man die passenden Koordinaten verwendet. Zum Beispiel bei rotationssymmetrischen Problemen können Polar- und Kugelkoordinaten nützlich sein.

Definition 2.20 1. *Polarkoordinaten:* $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

2. *Zylinderkoordinaten:* $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h \end{pmatrix}.$$

3. *Kugelkoordinaten in 3D:* $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Möchte man ein Integral mit Hilfe dieser neuen Koordinaten berechnen, dann braucht man die folgende Transformationsregel:

Theorem 2.21 (Transformationsatz) Sei $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ ein Diffeomorphismus und g eine integrierbare Funktion auf A . Dann gilt

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \int_A (g \circ F)(y) |\det(\nabla F(y))| dy.$$

Bemerkung 2.21.1 Hier gilt

$$\nabla F(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n(y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Man nennt $|\det(\nabla F(y))|$ die zu der Transformation F gehörende *Jacobi-Determinante*.

Ein Beweis wird Ihnen in der Analysis 3 Vorlesung vorgeführt.

Beispiel 2.22 Für $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ und

$$A = \{(r, \varphi, \theta); r \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)\}$$

finden wir

$$\begin{aligned} & \det(\nabla F(r, \varphi, \theta)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\int_{B_1(0)} g(x) dx = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (g \circ F)(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

Auch für Mannigfaltigkeiten gibt es einen Transformationsatz.

Definition 2.23 Sei M Teil einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n , die man mit der C^1 -Funktion

$$F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

eindeutig parametrisiert. Dann setzt man für $g \in C(\bar{M})$:

$$\begin{aligned} & \int_M g(x) d\sigma_m(x) \\ &:= \int_D (g \circ F)(y) \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right)} dy \end{aligned}$$

Bemerkung 2.23.1 1. $\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y)\right)_{i,j}$ ist eine $m \times m$ -Matrix mit an der Stelle i, j das \mathbb{R}^n -Skalarprodukt von den Vektoren $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y)$ und $\frac{\partial F}{\partial y_j}(y)$. Im Fall, dass $m = n$, finden wir

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right)} \\ &= \sqrt{\det \left((\nabla F(y)) (\nabla F(y))^T \right)} \\ &= \sqrt{\det(\nabla F(y)) \det \left((\nabla F(y))^T \right)} = |\det(\nabla F(y))| \end{aligned}$$

und es folgt das Ergebnis des Transformationssatzes.

2. Das Ergebnis der Definition ist unabhängig von der Parametrisierung F . Das ist nicht selbstverständlich, sondern man sollte es beweisen.
3. Für Hyperflächen stimmt dieses Integral überein mit dem standard m -dimensionalen Integral, wenn man ein passendes kartesisches Koordinatensystem nimmt.

Beispiel 2.24 Die Einheitssphäre in \mathbb{R}^3 können wir parametrisieren durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \det \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right) &= \det \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ \beta \cdot \alpha & \beta \cdot \beta \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (\sin \theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\sin \theta)^2. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt finden wir

$$\int_M g(x) d\sigma_2(x) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \sqrt{(\sin \theta)^2} d\varphi d\theta = 4\pi.$$

Beispiel 2.25 Für $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ kann man Koordinaten $(r, \omega) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ nehmen und man findet

$$\int_{B_R(0)} g(x) dx = \int_{r=0}^R \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} g(r\omega) r^{n-1} d\omega dr.$$

Ist g radialsymmetrisch, i.e. $g(x) = \tilde{g}(|x|)$ dann findet man

$$\int_{B_R(0)} g(x) dx = s_n \int_0^R \tilde{g}(r) r^{n-1} dr$$

mit $s_n = \text{Flächeninhalt}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Beispiel 2.26 Für $\Omega = B_R(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)} \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ findet man mit Gauß

$$\int_{\Omega} u(x) (\nabla \cdot v)(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cdot \nu d\sigma_x - \int_{\Omega} (\nabla u)(x) \cdot v(x) dx.$$

Für das Randintegral gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cdot \nu \, d\sigma_x \\ &= \int_{\partial B_R(0)} u(x) v(x) \cdot \frac{x}{|x|} \, d\sigma_x - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) v(x) \cdot \frac{x}{|x|} \, d\sigma_x \\ &= \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} (R^{n-1} u(R\omega) v(R\omega) - \varepsilon^{n-1} u(\varepsilon\omega) v(\varepsilon\omega)) \cdot \omega \, d\omega. \end{aligned}$$

Wenn $|u(x) v(x)| \leq C |x|^\alpha$ auf $B_1(0)$ und $\alpha > 1 - n$, dann findet man

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1} u(\varepsilon\omega) v(\varepsilon\omega) \cdot \omega \, d\omega \right| \\ & \leq \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1} C |\varepsilon\omega|^\alpha \, d\omega \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s_n C \varepsilon^{\alpha+n-1} = 0. \end{aligned}$$