Partielle Differentialgleichungen Woche 3

Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen

3.1 Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen

Wir nehmen an, dass die Differentialgleichungen in den folgenden Definitionen alle von Ordnung m sind.

Definition 3.1 *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\le m}} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x)=f(x) \tag{3.1}$$

mit a_α und f gegeben und u gesucht, nennt man linear.

Diese Differentialgleichung heißt linear, weil der Differentialoperator

$$L=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\le m}} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

linear ist: Wenn $Lu_1=f_1$ und $Lu_2=f_2$, dann gilt für beliebige $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, dass

$$L(c_1u_1+c_2u_2)=c_1f_1+c_2f_2.$$

Die einfachste Änderung, die uns eine nicht-lineare Differentialgleichung liefert, ist die folgende:

Definition 3.2 *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\le m}} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x)=f(x,u) \tag{3.2}$$

mit a_α und f gegeben und u gesucht, nennt man semilinear.

Es ist das Recht des Buchhalters, wenn er sagt, dass linear ja auch semilinear sei. Eine folgende Erweiterung ist:

Definition 3.3 *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=m}} a_\alpha\left(x,u,\nabla u,\dots\nabla^{m-1}u\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x)$$
$$=f(x,u,\nabla u,\dots\nabla^{m-1}u) \tag{3.3}$$

mit a_α und f gegeben und u gesucht, nennt man quasilinear.

Die restlichen partiellen Differentialgleichungen nennt man *völlig nichtlinear.*

3.2 Klassische Lösungen

Wenn man an Lösungen einer Differentialgleichung denkt, dann denkt man an Funktionen, die mit ihren Ableitungen punktweise die Gleichung erfüllen. Solche Lösungen nennt man klassisch. Es ist oft jedoch einfacher, statt punktweise, einen anderen Lösungstyp zu verwenden. Bevor wir solche nicht-klassischen Lösungen definieren, beschreiben wir die klassische Lösung.

Definition 3.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und betrachte die partielle Differentialgleichung von Ordnung m:*

$$f\left(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u\right) = 0 \tag{3.4}$$

Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt eine klassische Lösung von (3.4), wenn $u \in C^m(\Omega)$ gilt und die Gleichung in (3.4) für alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Bemerkung 3.4.1 *Wenn wir zusätzlich auch eine Randbedingung festlegen wollen, dann reicht $C^m(\Omega)$ nicht. Eine klassische Lösung vom Randwertproblem*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}u + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

braucht $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Die Randbedingung kann man sogar angeben durch $u \in C^2(\Omega) \cap C^0_0(\overline{\Omega})$.

3.3 Nicht-klassische Lösungen

3.3.1 Schwache Ableitungen und Lebesgue

Für eine punktweise definierte Funktion ist die Definition einer partiellen Ableitung eindeutig. Gelegentlich wird man aber eine Definition brauchen für die Ableitung einer Funktion, die nur als Äquivalenzklasse festgelegt ist. Wir erinnern an die $L^p(\Omega)$-Räume.

Definition 3.5 *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann ist $L^p(\Omega)$ der Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen f, für die gilt: $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ mit*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}\left\{|f(x)| ; x \in \Omega\right\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Bemerkung 3.5.1 *Wenn man „Lebesgue-messbar“ nicht kennt, dann lese man „integrierbar“. Ohne Verständnis von Lebesgue-messbar ist es schwierig genau das essentielle Supremum zu definieren:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f := \inf\left\{m; \lambda\left\{f(x) > m\right\} = 0\right\}$$

mit λ das Lebesgue-Maß. Bei Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, die stetig sind mit Ausnahme endlich vieler Punkte gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f = \sup_{x\in\Omega} f.$$

Beispiel 3.6 *Betrachte die folgende Funktion mit (abzählbar) unendlich vielen Unstetigkeitsstellen:*

$$u(x) = \begin{cases} n & \text{für } x \in \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^+\right\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Man findet, dass

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} u = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} u = \infty.$$

Auch gilt, dass $\|u\|_{L^1(0,1)} = 0$ *und man kann* u *in* $L^1(0,1)$ *nicht von* 0 *unterscheiden. Man sagt* $u = 0$ *im* $L^1(0,1)$*-Sinne. Genaueres findet man in der Vorlesung Analysis 3.*

Man sagt $u \in L^p_{\text{lokal}}(\Omega)$, wenn für jedes Gebiet Ω_1 mit $\overline{\Omega}_1$ kompakt und $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ gilt, dass $u_{|\Omega_1} \in L^p(\Omega_1)$. Dann ist $u \in L^p_{\text{lokal}}(\Omega)$ zwar ein Vektorraum aber ohne Norm.

Definition 3.7 *Sei* f *eine Lebesgue-messbare Funktion. Man sagt* $\partial_{x_i} f$ *existiert als schwache Ableitung in* $L^1_{lokal}(\Omega)$*, wenn es* $g \in L^1_{lokal}(\Omega)$ *gibt mit*

$$\int_\Omega \left(f(x)\,\partial_{x_i}\varphi(x) + g(x)\,\varphi(x)\right) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn f auf Ω eine stetige klassische Ableitung nach x_i hat, dann folgt aus einer partiellen Integration, dass

$$\int_\Omega \left(f(x)\,\partial_{x_i}\varphi(x) + \partial_{x_i} f(x)\,\varphi(x)\right) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Also sind stetige klassische Ableitungen auch immer schwache Ableitungen. Und wenn auf eine offene Menge $A \subset \Omega$ sowohl die klassische Ableitung als stetige Funktion, als auch die schwache Ableitung existieren, dann sind sie fast überall gleich auf A.

Beispiel 3.8 *Die Funktion* $f(x) = |x|$ *hat* $g(x) = \operatorname{sign}(x)$ *als schwache Ableitung. Man definiert*

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Sei $\operatorname{support}(\varphi) \subset [a,b]$ *mit* $0 \in (a,b)$*. Dann gilt mit Hilfe der partiellen Integration, dass*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(|x|\,\varphi'(x) + \operatorname{sign}(x)\,\varphi(x)\right) dx \\
&= \int_a^0 \left(|x|\,\varphi'(x) + \operatorname{sign}(x)\,\varphi(x)\right) dx \\
&\qquad + \int_0^b \left(|x|\,\varphi'(x) + \operatorname{sign}(x)\,\varphi(x)\right) dx \\
&= \int_a^0 \left(-x\varphi'(x) - \varphi(x)\right) dx + \int_0^b \left(x\varphi'(x) + \varphi(x)\right) dx \\
&= \left[-x\varphi(x)\right]_a^0 + \left[x\varphi(x)\right]_0^b = a\varphi(a) + b\varphi(b) = 0,
\end{aligned}$$

weil $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Beispiel 3.9 *Die Funktion* $g(x) = \operatorname{sign}(x)$ *hat keine schwache Ableitung auf* $\mathbb{R}$*. Wenn* h *eine solche schwache Ableitung wäre, dann müsste sie außerhalb von* 0 *mit der klassischen Ableitung übereinstimmen im* L^1*-Sinne und dies bedeutet* $h(x) = g'(x) = 0$ *fast überall. Es folgt für* φ *mit* $\operatorname{support}(\varphi) \subset [a,b]$ *und* $0 \in (a,b)$*, dass*

$$\begin{aligned}
0 = -\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(x)\,\varphi'(x)\,dx = \\
&- \int_a^0 \varphi'(x)\,dx + \int_0^b \varphi'(x)\,dx = 2\varphi(0),
\end{aligned}$$

und dies ist ein Widerspruch, wenn man $\varphi(0) \neq 0$ *nimmt.*

Aufgabe 3.1 *Welche Funktionen haben eine schwache Ableitung?*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = |x|^{-1/2}$.

Aufgabe 3.2 *Hat die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^{-1/2}$ und $n \geq 2$ schwache Ableitungen erster Ordnung? Ihre Antwort kann von n abhängen.*

3.3.2 Sobolev-Räume

Definition 3.10 *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$. Man definiert den* Sobolev[1]-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ *als die Menge (der Äquivalenzklassen) der Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ derart, dass u und deren schwache Ableitungen der Ordnung α mit $|\alpha| \leq k$ in $L^p(\Omega)$ liegen.*

Bemerkung 3.10.1 $\left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$ *mit Norm*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

ist ein vollständiger Banach-Raum.

Bemerkung 3.10.2 *Wie kann man herausfinden, ob eine Funktion u in $W^{k,p}(\Omega)$ liegt? Wenn Ω beschränkt ist und für diese Funktion gilt, dass $u \in C^k(\overline{\Omega})$, dann ist man fertig, weil alle Ableitungen von Ordnung kleiner gleich k stetig sind, und dann auch messbar, und sogar integrierbar, weil*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq$$
$$\left(\int_\Omega 1 dx \right)^{1/p} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{Vol}(\Omega)^{1/p} \|v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Wenn $u \in C^k(\Omega \backslash \text{Nullmengen})$, und Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ sind zum Beispiel alles von Dimension $n-1$ oder niedriger, dann soll man schauen, dass die Ableitungen von Ordnung kleiner gleich k noch integrierbar sind als Funktion in $L^p(\Omega)$.

Beispiel 3.11 *Betrachte die Funktion $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|^{-1}$.*

In welchen Sobolev-Räumen $W^{k,p}(B_1(0))$ liegt diese Funktion?

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und nur bei 0 macht sie „Probleme“. Für diejenigen, die Ana3 gehört haben: „Weil ein Punkt eine Nullmenge ist, sind f und auch alle ihre Ableitungen messbar auf $B_1(0)$“. Es bleibt zu kontrollieren, ob die Integrale beschränkt sind. Weil für $\sigma_n = \int_{\omega \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |\omega|=1} d\omega$ gilt

$$\int_{B_1(0)} |f(x)|^p dx = \sigma_n \int_{r=0}^1 \left(\frac{1}{r}\right)^p r^{n-1} dr =$$
$$\sigma_n \begin{cases} \left[\frac{1}{n-p} r^{n-p}\right]_0^1 < \infty & \text{für } n > p, \\ [\log r]_0^1 = \infty & \text{für } n = p, \\ \left[\frac{1}{n-p} r^{n-p}\right]_0^1 = \infty & \text{für } n < p, \end{cases}$$

[1] Sergei Lwowitsch Sobolew, 1908-1989, war ein Russischer Mathematiker. Er arbeitete an Partiellen Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Numerischer Mathematik und ... Uranisotopenanreicherung.

folgt für $f(x) = |x|^{-1}$*, dass*

$$f \in L^p(B_1(0)) \iff p \in [1, n).$$

Weil man zeigen kann, dass es $c_{n,k}, C_{n,k} \in \mathbb{R}^+$ *gibt mit*

$$c_{n,k}|x|^{-1-k} \le |\nabla f(x)| \le C_{n,k}|x|^{-1-k},$$

folgt für $f(x) = |x|^{-1}$ *auf ähnliche Art, dass*

$$f \in W^{k,p}(B_1(0)) \iff p \in \left[1, \tfrac{n}{k+1}\right),$$

denn nur für $(1+k)p < n$ *gilt*

$$\int_{r=0}^{1} \left(\frac{1}{r^{1+k}}\right)^p r^{n-1} dr < \infty.$$

Aufgabe 3.3 *Betrachte die Funktion* $u(x) = -\log|x|$ *und sei* $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

1. *Für welche* $p \in [1, \infty]$ *gilt* $u \in L^p(B_1(0))$*?*
2. *Berechnen Sie* $\nabla u(x)$ *für* $|x| \neq 0$.
3. *Für welche* $p \in [1, \infty]$ *gilt* $\nabla u \in L^p(B_1(0))$*?*

Beispiel 3.12 *Dass die Sache mit den schwachen Ableitungen nicht ganz trivial ist, zeigt die Cantor-Funktion. Diese monoton wachsende stetige Funktion* $f : [0,1] \to [0,1]$ *wird iterativ definiert, indem man am Anfang* $f_0(0) = 0$ *und* $f_0(1) = 1$ *setzt, und anschließend das dazwischenliegende Intervall drittelt, auf dem mittleren Teilintervall den Durchschnittswert der Funktionswerte in beiden Intervallrandpunkten an der Funktion zuweist. Dieses Dritteln und Mittelwert Setzen, wird wiederholt. Also*

$$f_1(x) = \begin{cases} f_0(0) = 0 \text{ für } x = 0, \\ \quad\frac{1}{2} \qquad \text{für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ f_0(1) = 1 \text{ für } x = 1, \end{cases}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(0) = 0 \text{ für } x = 0, \\ \quad\frac{1}{4} \qquad \text{für } x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \\ f_1(x) = \frac{1}{2} \text{ für } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \quad\frac{3}{4} \qquad \text{für } x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right], \\ f_1(1) = 1 \text{ für } x = 1, \end{cases}$$

und so weiter. Für jedes $x \in [0,1]$ *findet man eine Folge* $x_n \to x$ *derart, dass* $f_n(x_n)$ *definiert ist, und setzt* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$*. In Abbildung 3.1 findet man ein Bild dieser Funktion.*

Es gilt, dass $f'(x) = 0$ *auf* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \dots$*. Wenn wir die gesamte Länge dieser Intervalle berechnen, finden wir*

$$\ell = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

und dies bedeutet, dass f *fast überall differenzierbar ist auf* $[0,1]$ *mit klassischer Ableitung gleich 0. Also* $f' = 0$ *in* $L^1(0,1)$*. Um zu zeigen, dass trotzdem* f *keine schwache Ableitung hat, nehmen wir eine besondere Testfunktion* $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$*, nämlich*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le \frac{1}{9}, \\ 1 & \text{für } x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right], \\ 0 & \text{für } x \ge \frac{8}{9}. \end{cases}$$

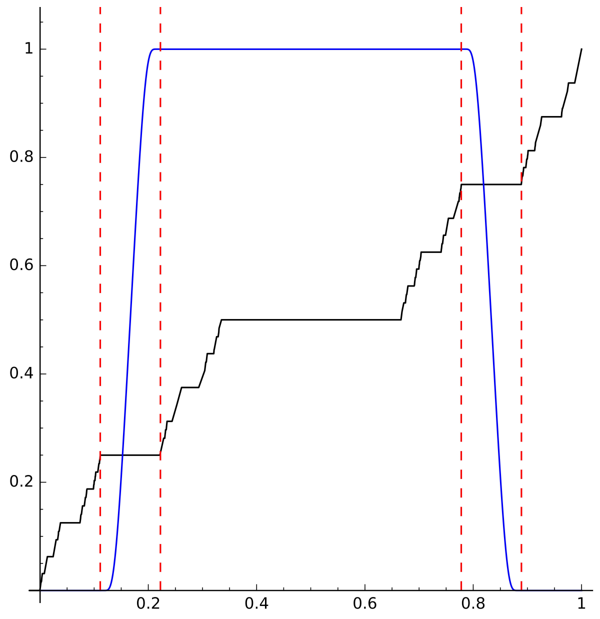

Abbildung 3.1: Die monotone Cantorfunktion und eine geschickt gewählte Testfunktion in blau.

Dann gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\frac19}^{\frac29} \tfrac14\varphi'(x)\,dx + \int_{\frac79}^{\frac89} \tfrac34\varphi'(x)\,dx$$
$$= \left[\tfrac14\varphi(x)\right]_{\frac19}^{\frac29} + \left[\tfrac34\varphi(x)\right]_{\frac79}^{\frac89} = \tfrac14 - \tfrac34 = -\tfrac12,$$

während

$$-\int_0^1 f'(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch.

3.3.3 Schwache und distributionelle Lösungen

Wie man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen schon gesehen hat, kommt man mit klassischen Lösungen nicht immer aus. Man erinnere sich an das Reibungsproblem bei zum Beispiel einem bremsenden Fahrzeug. Man konnte da nur eine Lösung definieren, wenn man an einzelnen Stellen zuließ, dass da die Differentialgleichung nicht erfüllt ist.

Beispiel 3.13 *Die Reibungskraft für zwei sich übereinander bewegende feste Körper ist annäherungsweise nur abhängig vom Vorzeichen der relativen Geschwindigkeit:*

$$F(v) = \begin{cases} -c & \text{für } v > 0, \\ 0 & \text{für } v = 0, \\ c & \text{für } v < 0. \end{cases}$$

Sei v die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und m die Masse, so gilt für die Beschleunigung v':

$$mv' = F(v).$$

Es gibt keine klassische Lösung. Wenn man jedoch die Integralform der Gleichung betrachtet:

$$m\,(v(t) - v(0)) = \int_0^t F(v(s))\,ds,$$

dann findet man die folgende Lösung, wenn $v(0) > 0$:

$$v(t) = \begin{cases} v(0) - \frac{c}{m}t & \text{für } t \in [0, t_1], \\ 0 & \text{für } t > t_1 := c^{-1}mv(0). \end{cases}$$

Für $t = t_1$ ist v nicht differenzierbar und deswegen ist v keine klassische Lösung.

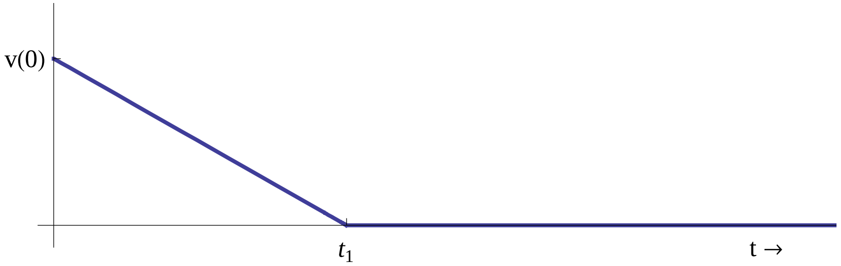

Abbildung 3.2: Skizze zu einer Geschwindigkeit $t \mapsto v(t)$ aus Beispiel 3.13.

Beispiel 3.14 *Die Wellengleichung in einer Raumdimension ist die folgende:*

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0.$$

Für $u(x,0) = \sin(x)$ findet man zum Beispiel die Lösungen

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \sin(x - ct), \\ u_2(x,t) &= \tfrac{1}{2}\sin(x - ct) + \tfrac{1}{2}\sin(x + ct). \end{aligned}$$

Durch direktes Differenzieren sieht man, dass die Differentialgleichung erfüllt ist. Sogar für jede C^2-Funktion $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekommt man eine Lösung, die $u(x,0) = u_0(x)$ erfüllt, wie folgt

$$u(x,t) = u_0(x - ct). \tag{3.5}$$

Was passiert jedoch, wenn u_0 nicht zweimal differenzierbar ist? Die Funktion in (3.5) kann nun keine klassische Lösung darstellen.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man also gelegentlich den Lösungsbegriff erweitern müssen und das hat man gemacht, indem man einzelne Stellen herausgenommen hat oder die Differentialgleichung ersetzte durch eine Integralgleichung. Bei partiellen Differentialgleichungen ist die Sache etwas schwieriger, denn in welche Richtung soll man integrieren? Wie soll man von einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem System erster Ordnung kommen?

Auch hier gibt es kein Lösungsmittel, das „alle Flecken rausbringt“ und wir müssen uns einschränken auf bestimmte Typen von partiellen Differentialgleichungen. Für (semi)lineare partielle Differentialgleichungen kann man, wenn die Koeffizienten a_α genügend glatt sind, den Lösungsbegriff jedoch relativ leicht erweitern.

Definition 3.15 *Man nennt $u \in C(\Omega)$ eine distributionelle Lösung der Gleichung (3.2), wenn*

$$\int_\Omega \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \le m}} u(x) \left(-\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \Big(a_\alpha(x)\, \varphi(x)\Big) - f(x, u(x))\varphi(x) \right) dx = 0 \tag{3.6}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Bemerke, dass diese Definition nur Sinn macht, wenn a_α genügend glatt ist, $a_\alpha \in C^m(\Omega)$. Wenn dies gilt, dann ist $\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x)\,\varphi(x))$ und das Integral wohldefiniert. Es ist übrigens nicht notwendig, dass $u \in C(\Omega)$. Es reicht, wenn mit dieser Funktion das Integral definiert ist. Wenn jedoch $u \in C^m(\Omega)$ gilt, findet man mittels partieller Integration die klassische Gleichung (3.2) im Integral zurück.

Es gibt auch den Begriff schwache Lösung. Dabei werden nicht alle partiellen Ableitungen zur Testfunktion φ gebracht, sondern nur die Hälfte.

Definition 3.16 *Man nennt $u \in C^{\tilde{m}}(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung*

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,\ |\alpha|,|\beta|\leq\tilde{m}} \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(a_{\alpha,\beta}\left(x\right) \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta} u\left(x\right)\right) = f(x,u),$$

wenn

$$\int_{\Omega} \Bigg(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|,|\beta|\leq\tilde{m}}} \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta} u\left(x\right)\right) a_{\alpha,\beta}\left(x\right) \left(\left(-\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \varphi\left(x\right)\right)$$
$$- f(x,u(x))\varphi\left(x\right) \Bigg) dx = 0 \qquad (3.7)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Bemerkung 3.16.1 *Die Spaltung zwischen den Ableitungen α und β ist nicht eindeutig. Für einzelne Probleme soll man genau definieren, was mit einer schwachen Lösung gemeint ist.*

Aufgabe 3.4 *Wir betrachten die Funktion $u \in C\left(\mathbb{R}\times[0,\infty)\right)$, definiert durch*

$$u\left(x,t\right) = \max\left(0, 1-|x-ct|\right).$$

1. *Zeigen Sie, dass u eine distributionelle Lösung ist von*
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}\times[0,\infty). \qquad (3.8)$$
2. *Existieren die schwachen Ableitungen erster Ordnung u_t und u_x?*
3. *Wenn man eine schwache Lösung von (3.8) definiert durch*
$$\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} \left(u_t\ \varphi_t - c^2 u_x\ \varphi_x\right) dxdt = 0$$
für alle $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}\times(0,\infty)\right)$, ist diese Funktion u eine schwache Lösung?

Um zu zeigen, dass klassische Lösungen auch schwache oder distributionelle Lösungen sind, brauchen wir eine Version des *Hauptlemmas der Variationsrechnung*:

Lemma 3.17 *Sei $u \in C(\Omega)$. Wenn*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann gilt $u = 0$.

Beweis. Wenn $u \neq 0$, dann gibt es $x_0 \in \Omega$ mit $u\left(x_0\right) \neq 0$. Nehmen wir an, dass $u(x_0) > 0$, dann folgt aus der Stetigkeit von u, dass es eine Umgebung $B_\varepsilon(x_0)$ gibt derart, dass $u(x) \geq c := \frac{1}{2}u(x_0) > 0$ für $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Nehmen wir $\varphi \in C_0^\infty\left(B_\varepsilon(x_0)\right)$ mit $\varphi \geq 0$ in $B_\varepsilon(x_0)$ und $\varphi \geq c_1 > 0$ in $B_{\varepsilon/2}(x_0)$, so folgt

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx > 0,$$

ein Widerspruch. ■

Dass es eine solche Funktion φ in dem letzten Beweis gibt, möge das Beispiel

$$\varphi_\varepsilon\left(x\right) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-\varepsilon^2}} & \text{für } \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases} \qquad (3.9)$$

deutlich machen. Man kann zeigen, dass auf dem Kreisrand $\|x\| = \varepsilon$ diese Funktion nicht nur stetig ist sondern auch, dass da alle Ableitungen existieren. Man verwende dazu, dass

$$\lim_{t\to\infty} p(t)\, e^{-t} = 0 \text{ für jedes Polynom } p.$$

So gilt $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B_{\varepsilon+t}(0))$ für alle $t > 0$.

Aufgabe 3.5 *Zeigen Sie die Behauptung*

$$\lim_{\|x\|\uparrow 1} \nabla^k \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

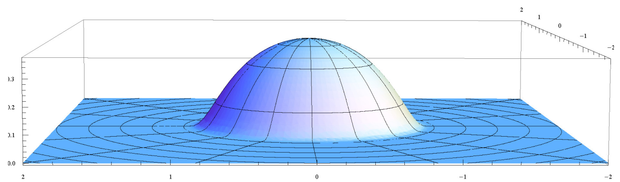

Abbildung 3.3: Skizze zu der Testfunktion φ_ε aus (3.9) mit $\varepsilon = 1$.

Das folgende Ergebnis zeigt die Verbindung zwischen klassischen und schwachen Lösungen.

Proposition 3.18 *Für semilineare Gleichungen gilt:*

- *Klassische Lösungen sind distributionelle Lösungen.*
- *Wenn $u \in C^m(\Omega)$ eine distributionelle Lösung der Gleichung (3.2) ist, so ist u eine klassische Lösung.*

Bemerkung 3.18.1 *Schwache Lösungen liegen zwischen distributionell und klassisch und ein ähnliches Ergebnis gilt.*

Beweis. Durch partielle Integration findet man, wenn der auswärtige Normalenvektor $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ auf $\partial\Omega$ wohldefiniert ist und wenn die Ableitungen von f und g bezüglich x_i stetig sind, dass

$$\int_\Omega f(x) \tfrac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x)\, \nu_i d\sigma_x - \int_\Omega \left(\tfrac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) g(x) dx.$$

Wenn $g(x) = 0$ oder $f(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$, dann entfällt der mittlere Term und es folgt

$$\int_\Omega f(x) \tfrac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_\Omega \left(-\tfrac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) g(x) dx. \tag{3.10}$$

So kann man (3.6), wenn $u \in C^m(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ angenommen worden ist, auch schreiben als

$$\int_\Omega \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\ |\alpha|\le m} a_\alpha(x) \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x) - f(x,u) \right) \varphi(x)\, dx = 0. \tag{3.11}$$

Im Fall, dass $\partial\Omega$ nicht genügend glatt ist um $\vec{\nu}$ zu definieren, soll man bemerken, dass φ einen kompakten Träger $K \subset \Omega$ hat. Man kann zeigen, dass es Ω^* gibt mit

$$K \subset \Omega^*, \overline{\Omega^*} \subset \Omega \text{ und } \partial\Omega^* \in C^\infty.$$

Im Integral (3.11) kann man dann Ω durch Ω^* ersetzen und öfters (3.10) anwenden auf Ω^*. Randintegrale auf $\partial\Omega^*$ sind wohldefiniert. Weil der Träger von φ innerhalb von Ω^* liegt, sind die Randintegrale identisch 0.

Das bedeutet, dass wenn u eine klassische Lösung ist, (3.11) äquivalent ist zu (3.6). Das bedeutet, dass u auch eine distributionelle Lösung ist. Umgekehrt, wenn $u \in C^m(\Omega)$ eine distributionelle Lösung ist, dann gilt (3.11) und man findet mit Hilfe des obigen Lemmas, dass die Differentialgleichung für jedes $x \in \Omega$ erfüllt ist. Das heißt, distributionelle Lösungen in $C^m(\Omega)$ sind klassisch. ■

3.4 Kriterien von Hadamard

Abbildung 3.4: Jacques Hadamard

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung braucht n unabhängige Bedingungen, um höchstens eine Lösung zu haben. War es bei einem Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung noch relativ einfach Bedingungen anzugeben, wo es genau eine Lösung gibt, nämlich die Bedingungen aus dem Satz von Picard-Lindelöf, war es bei Randwertproblemen schon schwieriger. Und bei Randwertproblemen war die Existenz bei linearen wiederum einfacher als bei nicht-linearen.

Für partielle Differentialgleichungen wird es sehr vom Typ abhängen, welche Art von Anfangs- oder Randwerten genau eine Lösung geben werden. Aber auch hier wird das Ziel sein, Bedingungen zu suchen derart, dass die Differentialgleichung mit festgelegten Anfangs- oder Randwerten die *Kriterien von Hadamard*[2] erfüllt:

- *Eindeutigkeit*: Das Problem hat höchstens eine Lösung.
- *Existenz*: Das Problem hat mindestens eine Lösung.
- *Robustheit*: Wenn man das Problem ein wenig ändert, ändert sich die Lösung auch nur wenig.

Die dritte Eigenschaft wird auch als *Stabilität* oder *stetige Abhängigkeit der Eingangsdaten* benannt.

Wenn ein Problem diese drei Eigenschaften hat, nennt man es *wohlgestellt*. Manchmal sagt man auch *wohldefiniert*.

[2] Jacques Salomon Hadamard, 1865 – 1963, Französischer Mathematiker, hat seine Spuren hinterlassen in vielen Teilgebieten der Mathematik.