Partielle Differentialgleichungen — Woche 4

Modelle und erste Ergebnisse

Dieses Kapitel versucht eine Verbindung herzustellen zwischen physikalischen Voraussetzungen und mathematisch formulierten Problemstellungen. Solche Modellierungsvorgänge sind eine Kunst an sich und bewegen sich außerhalb der üblichen Mathematik, bei der man versucht, aus einigen Axiomen eine zweifelsfreie Theorie aufzubauen. Modellierung fängt an mit Beobachtungen, Experimenten und Vermutungen, wie der Zusammenhang zwischen Ursache und Ergebnis erklärt werden kann. Modellierung ist oft keine angewandte, sondern nur eine unreine Mathematik. Die Mathematik an sich kann auch nicht erklären, wieso ein solches Modell korrekt wäre. Wenn jedoch das hergeleitete, mathematisch formulierte Modell durch mathematische Schlussfolgerungen zu unerwarteten Ergebnissen oder sogar zu einem Widerspruch führen würde, müsste man sich ernsthaft Sorgen machen über die Richtigkeit des Modells. Wenn die Ergebnisse übereinstimmen mit den Erwartungen, dann kann man nur hoffen, dass das Modell richtig ist.

Neben der Vorstellung einiger Modelle, werden auch ein paar einfache mathematische Ergebnisse gebracht.

4.1 Transportgleichung

Man stelle sich vor, dass sich eine Flüssigkeit oder ein Gas unter dem Einfluss einer Strömung bewegt. Diese Strömung ist gegeben durch ein Vektorfeld, das die lokale Geschwindigkeit $\vec{v}\,(x,t)$ der Teilchen beschreibt. Die Variable $x \in \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ beschreibt die Stelle und t die Zeit. Man möchte wissen, wie die Dichte $\rho = \rho\,(x,y,t)$ ist. Sei $\Omega\,(t)$ eine beschränkte Menge dieser Flüssigkeit. Wenn man einen Schritt $\triangle t$ weiter in der Zeit ist, hat diese Menge sich etwas deformiert zu $\Omega\,(t+\triangle t)$ unter Einfluss des Vektorfeldes. Siehe Abbildung4.1.

Weil die Masse erhalten bleibt, gilt

$$\int_{\Omega(t+\triangle t)} \rho\,(x,t+\triangle t)\,dx = \int_{\Omega(t)} \rho\,(x,t)\,dx.$$

Diese Identität benutzt man wie folgt für die Ableitung der

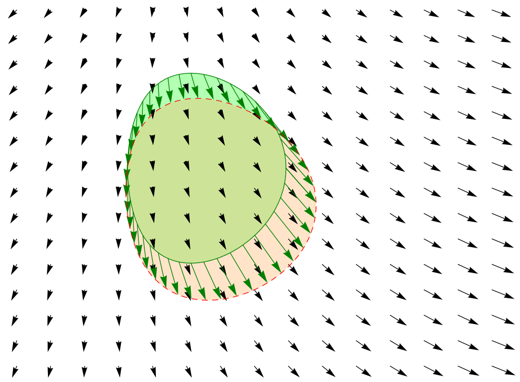

Abbildung 4.1: Von t zu $t+\triangle t$ hat $\Omega(t)$ sich bewegt nach $\Omega(t+\triangle t)$.

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{1}{\triangle t}\left(\int_{\Omega(t+\triangle t)} \rho\,(x,t+\triangle t)\,dx - \int_{\Omega(t)} \rho\,(x,t)\,dx\right) \\ =& \int_{\Omega(t)} \frac{\rho\,(x,t+\triangle t)-\rho\,(x,t)}{\triangle t} dx + \\ & \frac{1}{\triangle t}\left(\int_{\Omega(t+\triangle t)\setminus\Omega(t)} - \int_{\Omega(t)\setminus\Omega(t+\triangle t)}\right)\rho\,(x,t+\triangle t)\,dx. \end{aligned}$$

Es gilt für eine stetig differenzierbare Funktion ρ:

$$\lim_{\triangle t\downarrow 0}\int_{\Omega(t)} \frac{\rho\,(x,t+\triangle t)-\rho\,(x,t)}{\triangle t} dx = \int_{\Omega(t)} \partial_t\rho\,(x,t)\ dx \quad (4.1)$$

und für das Ein- und Ausströmen:

$$\begin{aligned} &\lim_{\triangle t\downarrow 0}\frac{1}{\triangle t}\left(\int_{\Omega(t+\triangle t)\setminus\Omega(t)} - \int_{\Omega(t)\setminus\Omega(t+\triangle t)}\right)\rho\,(x,t+\triangle t)\,dx \\ &\qquad = \int_{\partial\Omega(t)} \rho\,(x,t)\ \vec{v}\,(x,t)\cdot\vec{\nu}\ d\sigma_x. \end{aligned}$$

Hier ist $\partial\Omega(t)$ der Rand von $\Omega\,(t)$ und $\vec{\nu}$ der auswärtige Normalenvektor. Wegen des Integralsatzes von Gauß (Theorem 2.18) gilt

$$\int_{\partial\Omega(t)} \rho\,(x,t)\ \vec{v}\,(x,t)\cdot\vec{\nu}\ d\sigma_x. = \int_{\Omega(t)} \nabla\cdot\left(\rho\,(x,t)\ \vec{v}\,(x,t)\right)\ dx. \tag{4.2}$$

Aus (4.1) und (4.2) folgt

$$\int_{\Omega(t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(x,t)+\nabla\cdot\left(\rho\,(x,t)\ \vec{v}\,(x,t)\right)\right)\ dx = 0. \tag{4.3}$$

Weil diese letzte Gleichung für jedes Teilgebiet $\Omega(t)$ gilt, haben wir eine Differentialgleichung für die *Erhaltung der Masse* gefunden:

Gesetz 1 *Sei ρ die Dichte und $\vec{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit oder eines Gases. Dann gilt:*

$$\partial_t\rho\,(x,t)+\nabla\cdot\left(\rho\,(x,t)\ \vec{v}\,(x,t)\right) = 0. \tag{4.4}$$

Mit Gesetz ist hier ein physikalisches Gesetz[1] gemeint.

Bemerkung 4.0.1 *Wenn $\vec{v}$ gegeben ist, ist (4.4) eine Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Dichte ρ. Man nennt eine solche Differentialgleichung eine* Transportgleichung.

[1] Ein physikalisches Gesetz beruht auf Wahrnehmungen, Messungen und auch schon mal auf einer mathematischen Herleitung einer physikalischen Wahrnehmung. Man sollte Gesetz jedoch nicht mit dem mathematischen Begriff „Satz“ vergleichen.

4.2 Wärmeleitungsgleichung

In vielen Fällen wird $\vec{v}$ in (4.4) bestimmt durch die Dichte ρ. Wenn es sich um eine Flüssigkeit in einem porösen Medium handelt, gilt das folgende:

Gesetz 2 (Gesetz von Darcy) *Sei ρ die Dichte, $\vec{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit und P der Druck einer Flüssigkeit. Durch Messungen hat man den folgenden Zusammenhang gefunden:*

$$\rho\,(x,t)\ \ \vec{v}\,(x,t) = -c\nabla P\,(x,t)\,.$$

Die Konstante c wird durch das poröse Material und die Flüssigkeit bestimmt.

Wenn Druck und Dichte proportional sind, $P = c_1\rho$, findet man mit (4.4) und $c_2 = c_1 c$, dass

$$\begin{aligned}\partial_t\rho\,(x,t) &= -\nabla\cdot(\rho\,(x,t)\ \ \vec{v}\,(x,t)) \\ &= c\nabla\cdot\nabla P\,(x,t) = c_2\Delta\rho\,(x,t)\,.\end{aligned}$$

Ähnliches gilt für die Wärmeleitung.

Gesetz 3 (Wärmeleitungsgesetz oder Gesetz von Fourier) *Sei T die absolute Temperatur und $\vec{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit der Wärme, dann gilt*

$$T(x,t)\vec{v}\,(x,t) = -\tilde{c}\nabla T(x,t).$$

Die Konstante $\tilde{c}$ wird durch das Material bestimmt.

Für die Energiedichte gilt üblicherweise $\rho = c_1 T$. Auch hier folgt dann mit (4.4):

$$\partial_t T\,(x,t) = -\nabla\,(T\,(x,t)\,\vec{v}\,(x,t)) = c\nabla\cdot\nabla T(x,t) = c\Delta T(x,t).$$

Bemerkung 4.0.2 *Die Differentialgleichung*

$$\partial_t T\,(x,t) - c\ \Delta T\,(x,t) = 0$$

heißt die Wärmeleitungsgleichung. *Physikalisch gesehen ist c die Wärmekapazität. Durch Zeitskalierung, das heißt t durch $\tilde{t} = ct$ ersetzen, kann man $c = 1$ setzen.*

Sorgt zusätzlich eine Wärmequelle $f\,(x,t)$ im Innern für eine extra Zufuhr, dann bekommt man die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t T\,(x,t) - k\ \Delta T\,(x,t) = f\,(x,t)\,. \tag{4.5}$$

Wenn wir die Wärmeverteilung in einem isolierten Körper Ω betrachten, dann soll keine Wärme herein- oder hinausströmen. Das bedeutet, dass am Rande gilt

$$\nabla T\,(x,t)\cdot\vec{\nu} = 0 \text{ für } x\in\partial\Omega \text{ und } t>0. \tag{4.6}$$

- Die *Randwertbedingung* in (4.6) ist nach *Neumann* benannt worden. Man kann sie auch schreiben als
$$\frac{\partial}{\partial\nu}T\,(x,t) = 0 \text{ für } x\in\partial\Omega \text{ und } t>0.$$
- Wenn man die Temperatur T_1 am Rande vorschreibt, heißt das eine *Dirichlet Randwertbedingung*:
$$T\,(x,t) = T_1 \text{ für } x\in\partial\Omega \text{ und } t>0.$$

Das Rand-Anfangswertproblem für die Temperaturverteilung eines isolierten Körpers ist so das folgende Problem:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}T\,(x,t) - k\ \Delta T\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial}{\partial\nu}T\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ T\,(x,0) = T_0(x) & \text{für } x\in\Omega.\end{cases} \tag{4.7}$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist verwandt mit der Gleichung für die Strömung durch ein poröses Medium. Weil der Druck da als Funktion der Dichte schneller als linear zunimmt, nämlich zum Beispiel als $P = cu^m$ mit $m > 1$, wird die dazugehörige Differentialgleichung

$$\tfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) - k\ \Delta (u(x,t))^m = 0. \tag{4.8}$$

Bemerkung 4.0.3 *Man nennt (4.8) die* Poröse-Medien-Gleichung.

Für $m \neq 1$ ist diese Gleichung nicht-linear und das sorgt für erhebliche Schwierigkeiten. Diese Differentialgleichung werden wir in dieser Vorlesung dann auch nicht weiter anschauen.

Aufgabe 4.1 *Der Differentialgleichung*

$$\tfrac{\partial}{\partial t} u - c\nabla \cdot \left(|\nabla u|^{m-1} \nabla u \right) = 0$$

begegnet man öfter in der Literatur. Für welche c, wenn überhaupt, ist sie gleich zu (4.8)?

4.2.1 Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete

Lemma 4.1 *Sei $T \in C^2 \left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+\right)$ eine Lösung von (4.7), so gilt*

$$\int_\Omega T(x,t)\,dx = \int_\Omega T(x,0)\,dx.$$

Bemerkung 4.1.1 *Dies ist ein Erhaltungssatz. $\frac{\partial}{\partial \nu} T(x,t) = 0$ bedeutet, dass keine Wärme herausfließt und die gesamte gespeicherte Wärme erhalten bleibt.*

Beweis. Betrachtet man

$$I(t) = \int_\Omega T(x,t)\,dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega T(x,t)\,dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)\,dx \\ &= k \int_\Omega \Delta T(x,t)\,dx = k \int_{\partial\Omega} \nabla T(x,t) \cdot \nu\ d\sigma_x \\ &= k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} T(x,t)\ \ d\sigma_x = 0 \end{aligned}$$

und $I(t)$ ist konstant. ∎

Statt zu isolieren, kann man auch das Problem betrachten, bei dem die Temperatur am Rand festgehalten wird, sagen wir auf $T_1 = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) - k\ \Delta T(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x,0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Lemma 4.2 *Sei $T \in C^2 \left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+\right)$ eine Lösung von (4.7) oder (4.9), so gilt*

$$\int_\Omega T^2(x,t)\,dx \leq \int_\Omega T^2(x,0)\,dx.$$

Beweis. Betrachtet man

$$E(t) = \int_\Omega T^2(x,t)\,dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} T^2(x,t)\,dx \\ &= 2\int_\Omega T(x,t)\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)\,dx \\ &= 2k\int_\Omega T(x,t)\,\Delta T(x,t)\,dx \\ &= 2k\int_{\partial\Omega} T(x,t)\,\nabla T(x,t)\cdot\nu\ d\sigma_x \\ &\qquad\qquad - 2k\int_\Omega \nabla T(x,t)\cdot\nabla T(x,t)\,dx \\ &= -2k\int_\Omega \left|\nabla T(x,t)\right|^2\ dx \le 0. \end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$\int_{\partial\Omega} T(x,t)\,\nabla T(x,t)\cdot\nu\ d\sigma_x = \int_{\partial\Omega} T(x,t)\ \frac{\partial}{\partial\nu}T(x,t)\ d\sigma_x = 0$$

gilt sowohl für (4.7), als auch für (4.9). ■

Aufgabe 4.2 *Sei $k > 0$ und betrachte die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) - k\ \Delta T(x,t) + c\ T(x,t) = 0,$$

für $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ mit entweder

$$T(x,t) = 0 \ \textit{oder}\ \frac{\partial}{\partial\nu}T(x,t) = 0$$

auf $\partial\Omega$ für $t \ge 0$. Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_\Omega T^2(x,t)\,dx \le \int_\Omega T^2(x,0)\,dx$$

für alle $t > 0$?

Korollar 4.3 *Es gibt höchstens eine Lösung $T \in C^2\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_0^+\right)$ für das Anfangs/Randwertproblem (4.7). Dies trifft auch zu für Problem (4.9).*

Beweis. Wenn (4.7) (oder auch (4.9)) zwei verschiedene Lösungen T_1 und T_2 haben, betrachte man $T = T_1 - T_2$. Die Funktion T erfüllt das Anfangs/Randwertproblem mit $T = 0$ am Anfang und am Rand. Aus Lemma 4.2 folgt

$$0 \le \int_\Omega T^2(x,t)\,dx \le \int_\Omega T^2(x,0)\,dx = 0$$

und dann auch $T(x,t) = 0$ für $(x,t) \in \Omega\times[0,\infty)$. Das heißt $T_1 = T_2$. ■

4.3 Die Laplace Gleichung

Die Differentialgleichung

$$-k\ \Delta u(x) = f(x)$$

nennt man die *stationäre Wärmeleitungsgleichung* oder *Poisson Gleichung*. Für einen Potentialfluss hat man die Gleichung

$$\Delta u = 0. \tag{4.10}$$

Hier ist u das Potential und $\vec{v} = \nabla u$ die Geschwindigkeit. Diese Gleichung beschreibt eine Strömung, bei der die Dichte/Wärme nicht zeitabhängig ist.

Bemerkung 4.3.1 *Die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ heißt die* Laplace Gleichung. *Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$, die $\Delta u = 0$ auf Ω erfüllt, nennt man* harmonisch *auf Ω.*

4.3.1 Ein Ergebnis für harmonische Funktionen

Aus der Vorlesung Funktionentheorie soll man sich an einige schöne Ergebnisse für harmonische Funktionen in 2 Dimensionen erinnern. Eine solche Eigenschaft von harmonischen Funktionen lässt sich auch in höheren Dimensionen zeigen:

Proposition 4.4 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen) *Wenn $u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ in Ω, dann gilt für jede Kugel $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < r\}$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, dass*

$$\int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0))\, d\sigma_x = 0. \tag{4.11}$$

Bemerkung 4.4.1 *Setzt man*

$$\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 \; d\sigma_x, \tag{4.12}$$

dann ist ω_n der (Hyper)Flächeninhalt der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius 1. Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius r ist dann gleich $r^{n-1}\omega_n$. Die Gleichung (4.11) lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\; d\sigma_x &= \int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0)\; d\sigma_x \\ &= u(x_0) \int_{\partial B_r(x_0)} 1 \; d\sigma_x = r^{n-1}\omega_n u(x_0),\end{aligned}$$

und das heißt

$$\frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\; d\sigma_x = u(x_0).$$

Anders gesagt, $u(x_0)$ nimmt den Durchschnittswert auf dem Kugelrand $\partial B_r(x_0)$ an.

Bemerkung 4.4.2 *Die Gleichung in (4.11) kann man auch wie folgt formulieren:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma_y. \tag{4.13}$$

Wenn (4.13) gilt für alle $r \leq R$, so gilt auch

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy \tag{4.14}$$

für alle $r \leq R$ und umgekehrt. Von (4.13) zu (4.14) kommt man durch Integrieren von $\int_0^{r_1} r^{n-1} u(x) dr$ mit u aus (4.13).

Aufgabe 4.3 *Beweisem Sie, dass (4.13) für alle $r \in (0, R]$ und (4.14) für alle $r \in (0, R]$ äquivalent sind.*

Beweis von Proposition 4.4. Wir werden den Satz beweisen für $x_0 = 0$. Für $n \geq 3$ und $x \neq 0$ gilt folgendes:

$$\begin{aligned}\Delta |x|^{2-n} &= \nabla \cdot \nabla |x|^{2-n} = (2-n)\, \nabla \cdot \frac{x}{|x|^n} \\ &= (2-n) \left(\frac{n}{|x|^n} - n \frac{x \cdot x}{|x|^{n+2}} \right) = 0.\end{aligned}$$

So finden wir mit partieller Integration einerseits

$$\begin{aligned}&\int_{B_r(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \left(|x|^{2-n} - r^{2-n} \right) \cdot \nabla u(x)\, dx \\ &= \int_{\partial(B_r(0)\setminus B_\varepsilon(0))} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(|x|^{2-n} - r^{2-n} \right)\ u(x)\, d\sigma_x \\ &\qquad - \int_{B_r(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \left(|x|^{2-n} - r^{2-n} \right)\ u(x)\, dx \\ &= (2-n) \left(r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x)\, d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\, d\sigma_x \right),\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}&\int_{B_r(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \left(|x|^{2-n} - r^{2-n} \right) \cdot \nabla u(x)\, dx \\ &= \int_{\partial(B_r(0)\setminus B_\varepsilon(0))} \left(|x|^{2-n} - r^{2-n} \right)\ \frac{\partial}{\partial \nu} u(x)\, d\sigma_x \\ &\qquad - \int_{B_r(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \left(|x|^{2-n} - r^{2-n} \right)\ \Delta u(x)\, dx \\ &= \int_{\partial B_r(0)} 0\, \frac{\partial}{\partial \nu} u(x)\ d\sigma_x + \left(r^{2-n} - \varepsilon^{2-n} \right) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{\nu} \cdot \nabla u(x)\ d\sigma_x.\end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$\begin{aligned}&r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x)\, d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\ d\sigma_x \\ &= \frac{r^{2-n} - \varepsilon^{2-n}}{n-2} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)\ d\sigma_x. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Wir betrachten die einzelnen Terme aus (4.15).

Weil $\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)$ beschränkt ist, sagen wir der Betrag ist kleiner c_1, so findet man

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)\ d\sigma_x \right| \leq c_1 \omega_n \varepsilon^{n-1}.$$

Also gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{r^{2-n} - \varepsilon^{2-n}}{n-2} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)\ d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) = 0.$$

Auch gilt, weil $u \in C^1(\overline{B_r(0)})$, dass

$$\begin{aligned}\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (u(x) - u(0))\ d\sigma_x \right| &\leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x) - u(0)|\ d\sigma_x \\ &\leq c_2 \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x|\ d\sigma_x \leq c_2\ \varepsilon\ \varepsilon^{n-1}\ \omega_n,\end{aligned}$$

und es folgt, dass

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\ d\sigma_x \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(0)\ d\sigma_x + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) = \omega_n\ u(0)\,.\end{aligned}$$

Mit (4.15) findet man nun für $\varepsilon \downarrow 0$, dass

$$r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) \ d\sigma_x = \omega_n \ u(0),$$

und somit das gewünschte Ergebnis für $n \geq 2$. Für $n = 2$ ist das Ergebnis in der Vorlesung Funktionentheorie bewiesen. ∎

Aufgabe 4.4 *Zeigen Sie Proposition 4.4 für $n = 2$. Hinweis: ersetzen Sie die Funktion $|x|^{2-n} - r^{2-n}$ durch $-\ln(|x|) + \ln(r)$.*

Aus Proposition 4.4 folgt, dass, wenn man auf dem Rand $\partial B_r(x_0)$ eine harmonische Funktion u vergrößert, beziehungsweise verkleinert, auch $u(x_0)$ größer, beziehungsweise, kleiner wird. Man findet sogar das folgende starke Ergebnis:

Korollar 4.5 *Wenn $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch ist auf Ω und ein Extremum innerhalb von Ω hat, so ist u eine Konstante.*

Beweis. Nehmen wir an, u hat ein Maximum in $x_0 \in \Omega$. Weil Ω offen ist, gibt es $r_0 > 0$ mit $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$ und für jedes $r \in (0, r_0)$ gilt

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0) d\sigma_x = u(x_0). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist streng und gibt einen Widerspruch, wenn u nicht identisch $u(x_0)$ ist auf $\partial B_r(x_0)$. Es folgt also, dass u konstant ist auf $B_{r_0}(x_0)$. Man wiederholt diese Argumente für jedes $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$, $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$ usw.. Die Annahme, dass Ω offen und zusammenhängend ist, erlaubt es uns ganz Ω mit Kugeln zu überdecken. Auf jede Kugel in Ω ist u konstant, also ist u auch konstant auf Ω. ∎

Korollar 4.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Seien $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ und $u_r : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann hat das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.16}$$

für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ höchstens eine Lösung.

Beweis. Wenn (4.16) zwei solche Lösungen hat, sagen wir u_1 und u_2, dann erfüllt $u = u_1 - u_2$ das Randwertproblem in (4.16) mit $f = 0$ und $u_r = 0$. Wenn $u_1 \neq u_2$, dann hat u ein Extremum in Ω ungleich 0. Korollar 4.5 sagt dann, dass u konstant ist. Weil $u = 0$ auf dem Rand und weil u stetig ist auf $\bar{\Omega}$, folgt $u = 0$ auf $\bar{\Omega}$. Dies widerspricht der Annahme, dass u_1 und u_2 verschieden sind. ∎

Man sieht, dass die Eindeutigkeit einer Lösung hier relativ einfach ist. Das Zeigen der Existenz einer Lösung ist meistens wesentlich schwerer. Dass man eine explizit Lösung angeben kann, ist eine noch größere Seltenheit.

Aufgabe 4.5 *Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + xy + 3y^2 < 1\}$.*

1. *Berechnen Sie die einzige Lösung von*

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.17}$$

   Hinweis: Berechnen Sie $\Delta\left(1 - (x^2 + xy + 3y^2)\right)$.

2. *Für welche anderen Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ können sie so eine Lösung von (4.17) finden?*

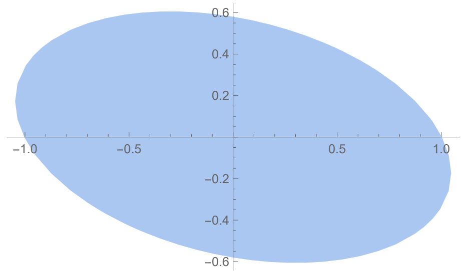

Abbildung 4.2: Das Gebiet aus Aufgabe 4.5

4.4 Die schwingende Saite

Nehmen wir zur Modellierung an, dass diese Saite aus einer Reihe kleiner Massen besteht, die elastisch verbunden sind. Wir nehmen außerdem an, dass die Spannung S in der Saite konstant ist. Sei $u(x,t)$ die vertikale Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t. Betrachten wir den Teil zwischen $x_1 - \frac{1}{2}\triangle x$ und $x_1 + \frac{1}{2}\triangle x$, dann wirken die folgenden Kräfte auf diesen Teil:

$$\vec{F}_{\text{links}} = \frac{-S}{\sqrt{1^2 + u_x\left(x_1 - \frac{1}{2}\triangle x, t\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x\left(x_1 - \frac{1}{2}\triangle x, t\right) \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_{\text{rechts}} = \frac{S}{\sqrt{1^2 + u_x\left(x_1 + \frac{1}{2}\triangle x, t\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x\left(x_1 + \frac{1}{2}\triangle x, t\right) \end{pmatrix}.$$

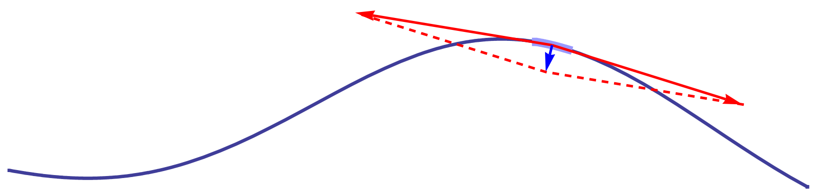

Abbildung 4.3: Kräfte bei einer schwingenden Saite

Wir betrachten nur die vertikalen Kräfte. Addiert man diese beiden Komponenten, so findet man

$$\left(\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}}\right)_2 = \left(\frac{u_x\left(x_1 + \frac{1}{2}\triangle x, t\right)}{\sqrt{1 + u_x\left(x_1 + \frac{1}{2}\triangle x, t\right)^2}} - \frac{u_x\left(x_1 - \frac{1}{2}\triangle x, t\right)}{\sqrt{1 + u_x\left(x_1 - \frac{1}{2}\triangle x, t\right)^2}} \right). \tag{4.18}$$

Entwickelt man mit Taylor nach $\triangle x$, so folgt mit für die gesamte vertikale Komponente in (4.18), dass

$$\left(\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}}\right)_2 = S \frac{u_{xx}(x_1, t)}{\left(1 + u_x(x_1, t)^2\right)^{3/2}} \triangle x + \mathcal{O}\left((\triangle x)^2\right). \tag{4.19}$$

Aus dem zweiten Gesetz von Newton[2],

$$F = \partial_t (mv) \tag{4.20}$$

mit v die vertikale Geschwindigkeit und m die Masse, folgt für den Teil der Saite zwischen $x_1 - \frac{1}{2}\triangle x$ und $x_1 + \frac{1}{2}\triangle x$ mit Dichte ρ, dass

$$mv = \int_{x_1 - \frac{1}{2}\triangle x}^{x_1 + \frac{1}{2}\triangle x} \sqrt{1 + u_x(x,t)^2}\,\rho\, \partial_t u(x,t)\, dx. \tag{4.21}$$

[2] Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Gesetz II. Die Änderung einer Bewegungsgröße ist der eingeprägten Bewegungskraft proportional und sie folgt der Geraden, entlang welcher diese Kraft eingeprägt wird.

Also folgt für $F = \left(\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}}\right)_2$ dann aus (4.19-4.21):

$$\partial_t \left(\int_{x_1 - \frac{1}{2}\triangle x}^{x_1 + \frac{1}{2}\triangle x} \sqrt{1 + u_x(x,t)^2} \rho \, \partial_t u(x,t) \, dx \right)$$
$$= S \triangle x \frac{u_{xx}(x_1,t)}{\left(1 + u_x(x_1,t)^2\right)^{3/2}} + \mathcal{O}\left((\triangle x)^2\right).$$

Dividiert man durch $\triangle x$ und nimmt den Grenzwert für $\triangle x \downarrow 0$, dann folgt

$$\partial_t \left(\sqrt{1 + u_x(x_1,t)^2} \rho \, \partial_t u(x_1,t) \right) = S \frac{u_{xx}(x_1,t)}{\left(1 + u_x(x_1,t)^2\right)^{3/2}}. \tag{4.22}$$

Angenommen, dass $|u_x(x_1,t)| \ll 1$ und dass $|u_{xt}(x_1,t)|$ beschränkt ist, approximiert man in (4.22) durch

$$1 + u_x(x_1,t)^2 \approx 1$$

und

$$\partial_t \sqrt{1 + u_x(x_1,t)^2} = \frac{u_x(x_1,t)\, u_{xt}(x_1,t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1,t)^2}} \approx 0.$$

Setzt man $c^2 = S/\rho$, dann wird (4.22) approximiert durch

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0. \tag{4.23}$$

Bemerkung 4.6.1 *Die Differentialgleichung in (4.23) heißt die* eindimensionale Wellengleichung.

4.5 Die Wellengleichung

Wenn man eine kompressible Flüssigkeit oder Gas betrachtet, hat man erstens den Erhaltungssatz aus (4.4):

$$\partial_t \rho(x,t) + \nabla \cdot \left(\rho(x,t)\ \vec{v}(x,t)\right) = 0. \tag{4.24}$$

Wir betrachten nun den Fall, bei dem der Druck p proportional zur Dichte ρ ist:

$$p(x,t) = c^2\ \rho(x,t) \tag{4.25}$$

und verwenden wieder das zweite Gesetz von Newton: $F = \frac{\partial}{\partial t}(mv)$ mit der Kraft F und dem Impuls mv. Die zugehörige Kräftegleichung für ein beliebiges Gebiet $U \subset \Omega$:

$$\text{„Impulsänderung von } U\text{“} = \frac{\partial}{\partial t}(mv)_{\text{auf } U}$$
$$= F_{\text{auf } U} = \text{„Gesamtdruck auf } \partial U\text{“},$$

wird

$$\partial_t \int_U \rho(x,t)\, \vec{v}(x,t)\, dx = -\int_{\partial U} p(x,t)\ \vec{\nu}\ d\sigma_x. \tag{4.26}$$

Mit wohldefiniertem auswärtigem Normalenvektor folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\int_U \partial_t \left(\rho(x,t)\, \vec{v}(x,t)\right) dx = -\int_U \nabla p(x,t)\ dx.$$

Weil U beliebig ist, gilt:

$$\partial_t \left(\rho(x,t)\, \vec{v}(x,t)\right) = -\nabla p(x,t). \tag{4.27}$$

Kombiniert man (4.27), (4.24) und (4.25), dann folgt

$$\Delta p = -\nabla \cdot \partial_t (\rho\ \vec{v}) = -\partial_t \nabla \cdot (\rho\ \vec{v}) = \partial_t \partial_t \rho = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p.$$

Bemerkung 4.6.2 *Die Differentialgleichung*

$$\partial_t^2 p(t,x) - c^2 \Delta p(t,x) = 0 \tag{4.28}$$

nennt man die Wellengleichung. *Auch hier kann man durch Zeitskalierung $c = 1$ setzen.*

Aufgabe 4.6 *1. Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(ct)$$

eine Lösung ist von

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{\sin(|x|)}{|x|}\cos(ct)$$

erweitert durch $u(0,t) := \lim_{|x|\to 0} u(x,t) = \cos(ct)$ eine Lösung ist von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Delta f(|x|) = \left(r^{-2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} f(r)\right)_{r=|x|}.$$

Aufgabe 4.7 *Ist die Funktion $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$, definiert durch*

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{\sin(|x|-ct)}{|x|} & \text{für } ct < |x| < ct + \pi, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine distributionelle Lösung von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+?$$

4.6 Die Membran

Ähnlich wie bei der Saite ist bei einer elastischen Membran die Kraft gleich der Spannung multipliziert mit der Krümmung. Nur ist nicht so ganz klar, welche Krümmung wir nehmen müssen, denn Funktionen $(x,y) \mapsto u(x,y)$ können sich in zwei Richtungen „krümmen". Ein etwas einfacherer Ansatz ist folgender. Statt das Kräftegleichgewicht darzustellen, betrachten wir die Energie. Wir nehmen an, dass bei einer eingespannten Membran die Energie proportional zum Flächeninhalt ist.

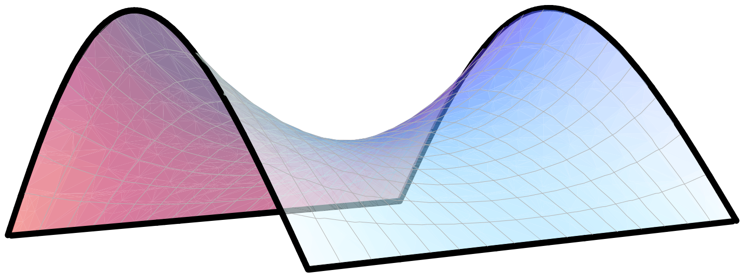

Abbildung 4.4: Ohne Kräfte von außen, hat eine eingespannte Membran oder Seifenblase die Form einer Oberfläche mit dem kleinsten Flächeninhalt.

Wenn wir die Membran parametrisieren durch

$$(x,y) \in \Omega \mapsto (x,y,u(x,y)) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

dann wird diese Energie als Funktional der Funktion u wie folgt:

$$E_{\text{elastisch}}(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, d(x,y). \tag{4.29}$$

Lässt man außerdem Kräfte zu, die mit Dichte $f(x,y)$ an der Stelle (x,y) vertikal eine Kraft ausüben, hat man zusätzlich einen Potentialterm durch Kraft mal Weg:

$$E_{\text{potentiel}}(u) := \int_\Omega f\ u\ d(x,y).$$

Die totale Energie ist

$$E_{\text{total}}(u) := \int_\Omega \left(\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} - f\ u\right) d(x,y)$$

Das *Prinzip der kleinsten Wirkung*, auch *Hamiltonisches Prinzip*[3] genannt, wird angewendet. Dieses Prinzip sagt, dass die Funktion, die das passende physikalische Verhalten repräsentiert, dieses Funktional (Die Physiker würden sagen: diese Wirkung) minimiert. Mathematisch heißt das, dass das Funktional größer wird, wenn wir die Lösung u stören mit $\varepsilon\phi$:

$$E_{\text{total}}(u+\varepsilon\phi) \geq E_{\text{total}}(u) \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ und } \phi \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Wenn die Funktion $\varepsilon \mapsto E_{\text{total}}(u+\varepsilon\phi)$ differenzierbar ist, dann gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} E_{\text{total}}(u+\varepsilon\phi)\right)_{|\varepsilon=0} = 0 \text{ für alle } \phi \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{4.30}$$

Für $u, \phi \in C^1(\overline{\Omega})$ ist (4.30) gleich

$$\int_\Omega \left(\frac{\nabla u \cdot \nabla\phi}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} - f\ \phi\right) d(x,y) = 0.$$

[3] Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

Wenn außerdem gilt, dass $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dann können wir für $\phi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ partiell integrieren und es folgt

$$\int_\Omega \left(-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right) - f\right) \phi\ d(x,y) = 0.$$

Weil dieses Integral gleich 0 ist für alle solche ϕ, findet man

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right) = f. \tag{4.31}$$

Auch hier vereinfacht man für $u_x^2+u_y^2 \ll 1$ die Gleichung zu $-\Delta u = f$.

Beispiel 4.7 *Für konstante $f \in [0,2]$, $\Omega = B_1(0)$ und $h \geq 0$, so dass $f\sqrt{1+h^2} = 2$ gilt, kann man zeigen, dass*

$$u(x,y) = \sqrt{1+h^2-x^2-y^2} - h$$

die Differentialgleichung (4.31) löst. Für $f > 2$ kann man zeigen, dass es keine Lösungen gibt! Es gibt auch Membrane, die sich nicht durch $(x,y,u(x,y))$ parametrisieren lassen. Zum Beispiel kann man zeigen, dass

$$(\varphi,\theta) \mapsto \left(R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta + \sqrt{R^2-1}\right)$$

mit $(\varphi,\theta) \in [0,2\pi] \times [0, \arcsin(1/R)]$ eine Oberfläche parametrisiert, die man auch als Lösung zulassen sollte. Diese Lösung lässt sich nicht als Funktion von (x,y) schreiben.

Die Skizzen in Abbildung 4.6 lassen sich nicht durch $(x,y,u(x,y))$ parametrisieren. Stattdessen kann man

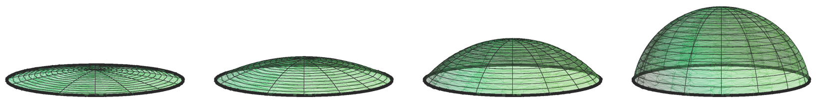

Abbildung 4.5: Einige Lösungen zu Beispiel 4.7 mit f gleich .4, .8, 1.2 und 1.4.

Abbildung 4.6: Einige Membrane, die sich nicht durch $(x, y, u(x, y))$ parametrisieren lassen; f ist gleich 1.4, 1.2, .8 und .6. Wie man erwarten sollte: Kugeloberflächen.

$(r(\varphi, \theta) \cos \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \sin \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \cos \theta)$ versuchen. Man kann das Funktional nach r, φ und θ umschreiben und kann sogar zeigen, dass die Bilder in Abbildung 4.6 Lösungen einer Differentialgleichung wie in (4.31) erfüllen. Diese Lösungen sind jedoch keine Minima. Sie sind zwar stationäre Punkte für dieses Funktional, sind jedoch kein Minimum, sondern ein Sattelpunkt.

Seifenblasen versuchen ihren Flächeninhalt zu minimieren und haben darum die in (4.29) genannte Energie. Sie haben aber nicht die oben genannte potentielle Energie. Sie minimieren (4.29) unter der Nebenbedingung, dass ihr Volumen konstant ist.

4.7 Stationäre Saiten und Balken

Die Energie einer aufgespannten Saite zwischen $(0, 0)$ und $(\ell, 0)$ ist proportional zu der Zunahme der Länge durch die Auslenkung:

$$E_{\text{elastisch},S}(u) = s \int_0^\ell \left(\sqrt{1 + u_x^2} - 1 \right) dx \approx \int_0^\ell \tfrac{1}{2} s \; u_x^2 \; dx.$$

Wenn man statt einer Saite einen Balken betrachtet, der an beiden Enden in die vertikale Richtung zurückgehalten wird, wird die elastische Energie durch das Quadrat der Krümmung verursacht:

$$E_{\text{elastisch},B}(u) = \tfrac{1}{2} \sigma \int_0^\ell \frac{u_{xx}^2}{(1 + u_x^2)^3} dx \approx \int_0^\ell \tfrac{1}{2} \sigma \; u_{xx}^2 \; dx$$

für kleine Auslenkungen. Hat man zusätzlich eine Kraft mit Dichte f, welche die Saite oder den Balken lokal seitwärts biegt, findet man

$$E_{\text{total},S}(u) = \int_0^\ell \left(\tfrac{1}{2} s \; u_x^2 - f \; u \right) dx, \tag{4.32}$$

$$E_{\text{total},B}(u) = \int_0^\ell \left(\tfrac{1}{2} \sigma \; u_{xx}^2 - f \; u \right) dx. \tag{4.33}$$

Testen mit φ unter Anwendung des Hamiltonischen Prinzips und durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} &\text{für } S: \quad -s \; u_{xx} = f, \\ &\text{für } B: \quad \sigma \; u_{xxxx} = f. \end{aligned}$$

Für die Saite findet man die Randbedingungen

$$u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0.$$

Für den Balken gibt es mehrere physikalisch vernünftige Randbedingungen.

Aufgabe 4.8 *Wir nehmen an, dass $f \in C[0, \ell]$ und dass für u und die Testfunktionen φ gilt: $u, \varphi \in C^2[0, \ell] \cap C_0[0, \ell]$.*

1. *Zeigen Sie, dass u das Minimum bei (4.32) gibt, wenn*

$$\int_0^\ell (s\ u_x \varphi_x - f\varphi)\, dx = 0 \tag{4.34}$$

für alle geschickte Funktionen φ.

2. *Zeigen Sie, dass wenn (4.34) gilt, so folgt $-s\ u_{xx} = f$.*

Bemerkung 4.7.1 *Wenn wir das zeitabhängige Problem betrachten und die Kraftdichte durch die vertikale Beschleunigung verursacht wird, finden wir die linearisierte Gleichung eines schwingenden Balkens:*

$$u_{tt}(x, t) - \sigma u_{xxxx}(x, t) = 0. \tag{4.35}$$