Partielle Differentialgleichungen Woche 5

Erster Ordnung: Transportgleichungen

5.1 Lineare und semilineare Transportgleichungen

5.1.1 Picard-Lindelöf

Transportgleichungen kann man zurückführen auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wir wiederholen eines der wichtigsten Ergebnisse für das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Hier ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben und man sucht ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, mit $0 \in I$, und eine Funktion $x \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$. Für f nimmt man an, sie erfüllt die Lipschitz-Bedingung:

Definition 5.1 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfüllt die* Lipschitz-Bedingung*, wenn*

1. *$(t, x) \mapsto f(t, x)$ stetig ist, und*
2. *es $L \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

Eine einfache Version des Hauptsatzes zu gewöhnlichen Differentialgleichungen ist wie folgt:

Theorem 5.2 (Picard-Lindelöf) *Wenn $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann*

1. *hat das Anfangswertproblem (5.1) eine Lösung $t \mapsto x(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, und*
2. *wenn $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ Lösungen der Differentialgleichung in (5.1) sind, dann gilt*

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{L|t|} |x(0) - y(0)| \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Bemerkung 5.2.1 *Die Ungleichung in (5.2) liefert die Eindeutigkeit bei dem Anfangswertproblem und auch, dass kleine Störungen beim Anfangswert auch nur kleine Änderungen, jedenfalls in beschränkter Zeit, in den Lösungen verursachen. Hadamard würde sich freuen.*

Bemerkung 5.2.2 *Bei vielen Funktionen ist die zweite Bedingung in Definition 5.1 nicht global erfüllt, sondern nur lokal: Für* $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *mit* $x_0 \in K^o$ *gibt es* $L_K \in \mathbb{R}^+$ *derart, dass*

$$\left|f\left(t,x\right)-f\left(t,y\right)\right| \leq L_K \left|x-y\right| \text{ für alle } \left(t,x\right),\left(t,y\right) \in K.$$

Es gibt dann eine angepasste Version von Theorem 5.2, die besagt, dass die Ergebnisse nur gelten, bis der Rand ∂K *durch* $(t, x(t))$ *erreicht wird.*

Wenn die Funktion f nicht von t abhängt, heißt die gewöhnliche Differentialgleichung *autonom*. Sie hat dann also die Form

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Wenn $t \mapsto x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (5.1) ist, dann nennt man $\{x(t)\,; t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ manchmal die Lösungskurve.

Korollar 5.3 *Bei autonomen Differentialgleichungen mit* f *Lipschitz schneiden unterschiedliche Lösungskurven sich nicht.*

Beweis. Wenn $x_a(\cdot)$ und $x_b(\cdot)$ beide die Differentialgleichung in (5.1) erfüllen und sich schneiden, dann gibt es $t_a, t_b \in \mathbb{R}$ mit

$$x_a(t_a) = x_b(t_b) =: x_0.$$

Weil $t \mapsto x_b(t+t_b)$ und $t \mapsto x_a(t+t_a)$ das gleiche Anfangswertproblem löst, nämlich

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.3}$$

folgt $x_b(t+t_b) = x_a(t+t_a)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Lösungskurven sind dann entweder identisch oder sie schneiden sich nicht. ■

5.1.2 Transportgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine sehr einfache Differentialgleichung aus dieser Klasse ist

$$\vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.4}$$

Hier sind $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben und u ist gesucht. Wir betrachten eine Kurve

$$x(t) = x_0 + t\,\vec{v}.$$

Dann gilt

$$\tfrac{\partial}{\partial t} u(x(t)) = \vec{v} \cdot \nabla u(x(t))$$

und wenn wir uns auf eine solche Kurve beschränken, kann man (5.4) leicht lösen. Für $U(t) := u(x(t))$ und $F(t) := f(x(t))$ wird die Differentialgleichung

$$U'(t) = F(t).$$

Also hat man

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds.$$

Zurückgeführt auf (5.4) folgt

$$u(x_0 + t\,\vec{v}) = u(x_0) + \int_0^t f(x_0 + s\,\vec{v})\,ds \tag{5.5}$$

und diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung auf der Geraden durch x_0 in der Richtung $\vec{v}$. Kennt man $u(x)$ auf einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, die mit jeder Geraden $\{x_0 + t\,\vec{v}; t \in \mathbb{R}\}$ höchstens einen Punkt gemeinsam hat, dann hat man eine Lösung der Differentialgleichung auf $\Omega = \{x_0 + t\,\vec{v}; x_0 \in M \text{ und } t \in \mathbb{R}\}$.

Etwas haben wir nicht beachtet. Wenn $x \in M \mapsto u(x)_{|M}$ nicht differenzierbar ist, kann man auch nicht erwarten, dass ∇u für u in (5.5) definiert ist. Im schwachen Sinne ist es trotzdem eine Lösung.

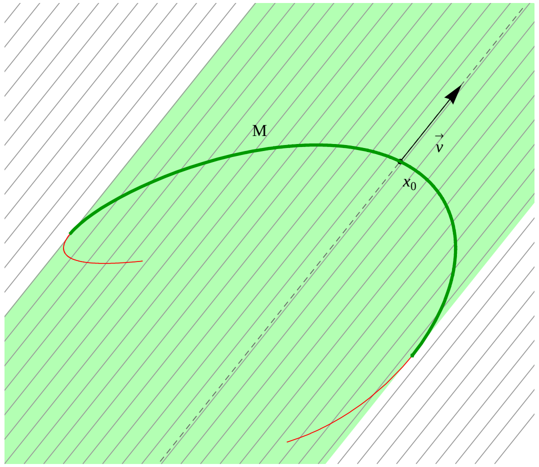

Abbildung 5.1: Die Werte, vorgeschrieben auf der grünen Kurve, geben eine Lösung auf dem hellgrünen Gebiet. Man kann u nicht beliebig vorschreiben auf der Fortsetzung (die rote Kurve).

Beispiel 5.4 *Wir suchen eine Lösung von*

$$\begin{cases} u_x(x,y) + u_y(x,y) = 1, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x,y) = 1.$$

Schritt 1. Wir suchen die charakteristischen Kurven durch $\{(x_0,0)\,;x_0 \in \mathbb{R}\}$ *und die sind*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2. Wir setzen $U(t) = u(x(t),y(t))$ *und finden die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$U'(t) = \partial_t\left(u(x(t),y(t))\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x(t),y(t)) = 1$$

mit der Anfangsbedingung $U(0) = u(x(0),y(0)) = u(x_0,0) = x_0^2$*. Es folgt*

$$U(t) = U(0) + t = x_0^2 + t.$$

Schritt 3. Transformieren zu den alten Koordinaten verwendet

$$u(x(t),y(t)) = U(t) = x_0^2 + t$$
$$x(t) = x_0 + t \text{ und } y(t) = t.$$

Es folgt $u(x_0+t,t) = x_0^2 + t$ *und man findet eine Lösung auf ganz* $\mathbb{R}^2$ *für* u*, nämlich*

$$u(x,y) = (x-y)^2 + y.$$

Aufgabe 5.1 *Geben Sie eine Lösung von*

$$\begin{cases} u_x + u_y = 1 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(t,-t) = \sin(t) & \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 5.2 *Gegeben ist die Differentialgleichung*

$$u_x - u_y = 1 \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

mit Randbedingungen auf dem Einheitskreis.

1. *Geben Sie ein größtes Intervall in $\mathbb{R}$ an, das Sie verwenden können von*

$$u(\cos t, \sin t) = \sin(t)^2 \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

um eine Lösung festzulegen.

2. *Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Lösung dann festgelegt?*

5.1.3 Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen

Die Differentialgleichung, die gemeint ist, ist die folgende:

$$\vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.6}$$

Hier ist $\vec{v}$ und f gegeben und wir nehmen an, dass $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Zusätzlich soll eine Randwertbedingung erfüllt sein:

$$u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M \tag{5.7}$$

mit M eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das Problem (5.6)-(5.7) löst man in zwei Schritten.

- Man löse erstens $x'(t) = \vec{v}(x(t))$. Wenn $x \mapsto v(x)$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt, gibt es für jedes $x_0 \in M$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Dies folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Die Lösung $t \mapsto x(t; x_0)$ ist stetig differenzierbar.

Die Lösungen von (5.8) nennt man die *charakteristischen Kurven* für (5.6). Aus der Eindeutigkeit und der Tatsache, dass $x'(t) = \vec{v}(x(t))$ autonom ist, folgt:

Lemma 5.5 *Sei $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Wenn sich zwei charakteristische Kurven $t \mapsto x_a(t)$ und $t \mapsto x_b(t)$ zu der (semi)linearen Transportgleichung (5.6) schneiden, sind sie „identisch": es gibt $T \in \mathbb{R}$ mit $x_a(t) = x_b(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

- Sei $t \mapsto x(t; x_0)$ eine Lösung von (5.8) und schreibe $U(t) = u(x(t; x_0))$. Definiere $F(t, u) = f(x(t; x_0), u)$. Wenn u (5.6) erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned} U'(t) &= x'(t; x_0) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) \\ &= \vec{v}(x(t; x_0)) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) \\ &= f(x(t; x_0), u(x(t; x_0))) = F(t, U(t)). \end{aligned}$$

Wenn $(x, u) \mapsto f(x, u)$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt, erfüllt $(t, u) \mapsto F(t, u)$ die Lipschitz-Bedingung. Auch hier kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden, um genau eine Lösung zu finden zu

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0). \end{cases} \tag{5.9}$$

Schreibe für diese Lösung $t \mapsto U(t; x_0)$.

Für die Funktion u, die (5.6)-(5.7) lösen soll, findet man

$$u(x(t; x_0)) = U(t; x_0).$$

Es ist noch nicht klar, ob u so tatsächlich wohldefiniert ist in einer Umgebung von M. Die Funktion könnte mehrfach oder sogar überhaupt nicht definiert sein. Wir brauchen dafür die folgende Bedingung:

Bedingung 5.6 *Sei M eine $(n-1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und sei $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Wir schreiben $\vec{\nu}(x)$ für einen Normalenvektor an M in $x \in M$. Man sagt die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, wenn*

$$\vec{v}(x) \cdot \vec{\nu}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in M. \tag{5.10}$$

Proposition 5.7 *Sei M eine $(n-1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und sei $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ derart, dass die Transversalitätsbedingung (5.10) erfüllt ist. Sei außerdem $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ und $u_0 \in C^1(M)$. Dann gibt es lokal genau eine Lösung $x \mapsto u(x)$ von*

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases} \tag{5.11}$$

Bemerkung 5.7.1 *Die Lösungen lassen sich sogar definieren auf dem ganzen Gebiet, welches von diesen charakteristischen Kurven überdeckt wird. Bei diesen Kurven kann mehreres passieren: sie hauen ab nach ∞; sie häufen sich in einem Punkt; sie kommen zurück zu der Mannigfaltigkeit und auch Kombinationen sind möglich. Genaueres erfahren Sie in einer Vorlesung Dynamische Systeme.*

Beweis. Weil M eine $(n-1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ ist, gibt es in der Nähe von x_M ein lokales Koordinatensystem für M

$$\Psi : B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \to M \subset \mathbb{R}^n.$$

Durch die Bedingung in (5.10) gibt

$$(y_1, \ldots, y_{n-1}, t) \mapsto \Psi(y_1, \ldots, y_{n-1}) + t\ v(\Psi(y_1, \ldots, y_{n-1}))$$

ein lokales Koordinatensystem für $\mathbb{R}^n$ in der Nähe von x_M. Nun betrachten wir

$$(y_1, \ldots, y_{n-1}, t) \mapsto x(t; \Psi(y_1, \ldots, y_{n-1})). \tag{5.12}$$

Weil

$$\begin{aligned} \nabla_y x(t; \Psi(y_1, \ldots, y_{n-1}))_{|(0,\ldots,0,0)} &= \nabla_y \Psi(y_1, \ldots, y_{n-1})_{|(0,\ldots,0)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} x(t; \Psi(y_1, \ldots, y_{n-1}))_{|(0,\ldots,0,0)} &= v(x_m), \end{aligned}$$

und diese Ableitungen stetig sind, ist auch (5.12) lokal ein wohldefiniertes Koordinatensystem. Anders gesagt, die Funktion u mit

$$u(x(t; \Psi(y))) := U(t; \Psi(y))$$

ist wohldefiniert. Wegen Lemma 5.5 und der Transversalitätsbedingung ist u sogar eindeutig definiert auf

$$\Omega = \left\{ x(t; \Psi(y)) ; t \in \left[0, T_{\Psi(y)}\right) \text{ und } y \in M \right\}.$$

Hier ist $T_{\Psi(y)} \in (0, \infty]$ entweder definiert durch das maximale Existenzintervall oder durch die Bedingung

$$x\left(T_{\Psi(y)}; \Psi(y)\right) \in M.$$

Die Konstruktion zeigt uns, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und weil jeder Punkt in einer kleinen Umgebung eindeutig über eine charakteristische Kurve zurückzuführen ist auf ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung, ist diese klassische Lösung lokal eindeutig. ■

Beispiel 5.8 *Finde die Lösung von*

$$\begin{cases} u_x(x,y) + y\ u_y(x,y) = u(x,y), \\ u(x,1) = x+1. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x,y) = u(x,y).$$

Die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, weil

$$\vec{v}(x,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht in der Tangentialrichtung von $\Gamma = \{(x,1); x \in \mathbb{R}\}$ *liegt.*

Schritt 1: Wir suchen erst die charakteristischen Kurven, die durch $\{(x_0,1); x_0 \in \mathbb{R}\}$ *gehen:*

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Wir suchen die Lösungen $U(\cdot) = U(\cdot; x_0)$ *von*

$$\begin{cases} U'(t) = U(t), \\ U(0) = x_0 + 1, \end{cases}$$

und finden

$$U(t; x_0) = (x_0 + 1)\, e^t.$$

Schritt 3: Wir müssen noch zurückrechnen zu (x,y)*-Koordinaten. Es gilt*

$$t = \ln(y) \text{ und } x_0 = x - t = x - \ln(y)$$

und man findet für $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$*:*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U(t; x_0) = U(\ln(y); x - \ln(y)) \\ &= (x - \ln(y) + 1)\, y. \end{aligned}$$

Für $y \leq 0$ *ist die Lösung nicht bestimmt.*

Aufgabe 5.3 *Geben Sie eine Lösung von*

$$\begin{cases} xu_x + u_y = 1 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \sin(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 5.4 *Versuchen Sie, das folgende System so weit wie möglich zu lösen:*

$$\begin{cases} xu_x + (1+x^2)\, u_y = 1 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wenn Sie dies richtig lösen, begegnen Sie irgendwo der Funktion $t \mapsto t + \frac{1}{2}x^2\left(1 - e^{-2t}\right)$*. Weil diese Funktion monoton wachsend ist für alle* $x \in \mathbb{R}$*, existiert eine Inverse* $y \mapsto f(y; x)$*, die man jedoch nicht explizit berechnen kann, es sei denn, man verwendet die Funktion* ProductLog*, die in* Mathematica *definiert wird.*

Aufgabe 5.5 *Wenn wir*

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = f(x,y) & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 2-x) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

betrachten, dann geben Sie bitte an, für welche $(x,y) \in \mathbb{R}$ *die Lösung als Funktion von* f *und* g *festgelegt ist.*

5.2 Quasilineare Transportgleichungen

Gemeint sind Differentialgleichungen der Form

$$\vec{v}\,(x,u)\cdot\nabla u\,(x)=f\,(x,u\,(x))\,.$$

Wenn versucht wird, hier diese Methode mit den charakteristischen Kurven anzuwenden, bemerkt man, dass diese Kurven abhängig sind von der Lösung u. Das bedeutet, dass man das Finden dieser Kurven nicht mehr trennen kann von dem Lösen entlang dieser Kurven. Trotzdem gibt es die Möglichkeit, beides gleichzeitig zu tun! Man betrachte das folgende System von $n+1$ Gleichungen

$$\begin{cases} x'(t)=\vec{v}\,(x(t),U\,(t))\,,\\ U'\,(t)=f\,(x\,(t)\,,U\,(t))\,.\end{cases}$$

Hat man Anfangswertbedingungen $u\,(x)=u_0(x)$ für $x\in M$, eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, bekommt man für jedes $x_0\in M$ das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x'(t)=\vec{v}\,(x(t),U\,(t))\,,\\ U'\,(t)=f\,(x\,(t)\,,U\,(t))\,,\\ x\,(0)=x_0 \text{ und } U\,(0)=u_0\,(x_0)\,.\end{cases}$$

Wenn $\vec{v}$ und f differenzierbar sind, kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden, um eine eindeutige Lösung zu finden bei jedem $x_0\in M$. Schreiben wir für die Lösung

$$t\mapsto\Big(x\,(t;x_0,u_0)\,,U\,(t;x_0,u_0)\Big)$$

Wenn $u\,(x)$ wohldefiniert ist durch

$$u\,(x\,(t;x_0,u_0)):=U\,(t;x_0,u_0)\,,$$

das heißt, wenn es genau ein $(t,x_0)\in\mathbb{R}\times M$ gibt mit $x=x\,(t;x_0,u_0)$, dann gilt

$$\begin{aligned} x'\,(t;x_0,u_0)\cdot\nabla u\,(x\,(t;x_0,u_0))&=U'\,(t;x_0,u_0)\\ &=f\,(x\,(t;x_0,u_0)\,,U\,(t;x_0,u_0))\,,\end{aligned}$$

und für solche $x=x\,(t;x_0,u_0)$ folgt

$$v\,(x)\cdot\nabla u\,(x)=f\,(x,u\,(x))\,.$$

Auch hier gilt ein ähnliches Ergebnis wie in Proposition 5.7:

Proposition 5.9 *Sei M eine $(n-1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$,*

$$\vec{v}\in C^1\left(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R}^n\right),\ \ f\in C^1\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\right)\ \ \textit{und } u_0\in C^1\,(M)\,.$$

Wenn $\vec{v}$ und u_0 derart sind, dass

$$\vec{v}\,(x,u_0\,(x))\cdot\vec{\nu}\,(x)\neq 0 \textit{ für alle } x\in M, \tag{5.13}$$

dann gibt es lokal genau eine Lösung $x\mapsto u\,(x)$ von

$$\begin{cases}\vec{v}\,(x,u\,(x))\cdot\nabla u\,(x)=f(x,u\,(x)),\\ u\,(x)=u_0\,(x) \textit{ für } x\in M.\end{cases} \tag{5.14}$$

Beweis. Dieser ist ähnlich wie der für Proposition 5.7. ■

Beispiel 5.10 *Wir betrachten*

$$\begin{cases} u\,(x,y)\,u_x\,(x,y)+u_y\,(x,y)=0,\\ u\,(x,0)=\tfrac{1}{2}\pi-\arctan x.\end{cases} \tag{5.15}$$

Um dieses System mit dem obigen Ansatz zu lösen, betrachtet man

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ y'(t) = 1 & \text{mit } y(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = \tfrac{1}{2}\pi - \arctan s. \end{cases}$$

Es folgt, wenn wir nach t integrieren und anschließend die Anfangswerte einsetzen, dass

$$\begin{cases} U(t) = U(0) = \tfrac{1}{2}\pi - \arctan s, \\ y(t) = y(0) + t = t, \\ x(t) = x(0) + \displaystyle\int_0^t U(\tau)d\tau = s + t\left(\tfrac{1}{2}\pi - \arctan s\right). \end{cases} \tag{5.16}$$

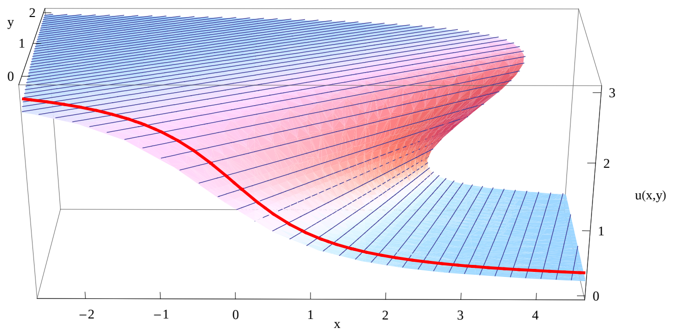

Abbildung 5.3: Skizzen der Kurven $t \mapsto (x(t), y(t), U(t))$ aus (5.16) bei verschiedenen s. In rot ist die Bedingung $u(x,0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x$ dargestellt.

Wir finden:

$$\begin{aligned} U(t) &= u(x(t), y(t)) = u\left(s + t\left(\tfrac{1}{2}\pi - \arctan s\right), t\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\pi - \arctan s. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Wenn wir versuchen die Lösung in x und y darzustellen, dann folgt $t = y$ und s sollen wir lösen aus

$$x = s + y\left(\tfrac{1}{2}\pi - \arctan s\right). \tag{5.18}$$

Das ist möglich, wenn $y \leq 1$, denn dann ist die Funktion $s \mapsto s - y \arctan s$ monoton. Für $y > 1$ ist diese Funktion nicht monoton und (5.18) ist dann nicht eindeutig lösbar in s. Das sieht man, wenn man die Abbildung 5.3 von oben betrachtet. Diese Ansicht findet man in Abbildung 5.4.

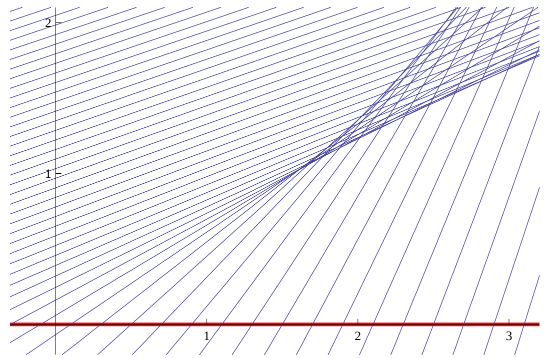

Abbildung 5.4: Die Kurven aus 5.16

Aufgabe 5.6 *Geben Sie die Funktion $t \mapsto (x(t), y(t), U(t))$ an, die in parametrisierter Form (teils) eine Lösung von*

$$\begin{cases} u(x,y)u_x(x,y) + u_y(x,y) = 1 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

liefert.

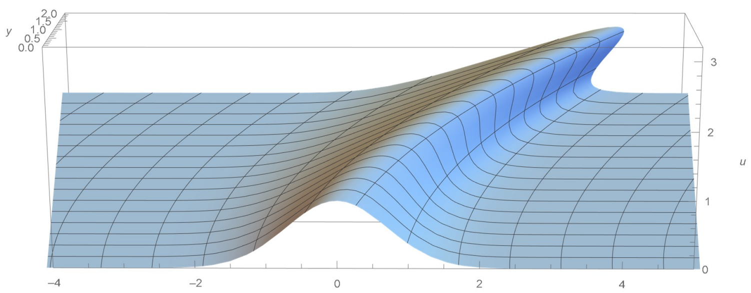

Abbildung 5.5: Bild der Parametrisierung bei Aufgabe 5.6

5.2.1 Stoßwellen

Bei quasilinearen Transportgleichungen gibt es also Probleme, weil charakteristische Kurven abhängen von der Lösung selber. Das bedeutet, dass die Differentialgleichung für die charakteristischen Kurven nicht autonom ist und die Lösungen zu den verschiedenen Anfangswerten sich schneiden können. Bei einer autonomen Differentialgleichung mit Lipschitz-Bedingung ist solches nicht möglich. In diesem Abschnitt werden wir erklären, wie man bei einem solchen Fall vorgeht. Wir werden uns beschränken auf zwei Dimensionen und sogar auf Anfangswertprobleme der Gestalt:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.19}$$

Kommen wir zurück zu Beispiel 5.10. Die Differentialgleichung $u\ u_x + u_y = 0$ nennt man die *nicht-viskose Burgersgleichung*[1]. Üblicherweise wird sie geschrieben als

$$u_t + \tfrac{1}{2}\left(u^2\right)_x = 0, \tag{5.20}$$

[1] Johannes Martinus Burgers (1895–1981), Technische Hogeschool Delft, 1940.

wobei t die Zeit- und x die Raumvariable ist. Sie wird als ein einfaches Modell für eine eindimensionale Strömung gesehen wie zum Beispiel für die Verkehrsdichte im Straßenverkehr. Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass sich dieses Modell an bestimmten Stellen nicht mehr eindeutig fortsetzen lässt. Man hat nun zwei Möglichkeiten: Entweder verwirft man dieses Modell als nicht tauglich oder man erweitert den Lösungsbegriff, das heißt, man lässt allgemeinere Lösungstypen zu.

Eine erste Möglichkeit, die man für (5.19) in Betracht zieht, ist wenn man statt (5.20) die *viskose Burgersgleichung* betrachtet:

$$u_t + \tfrac{1}{2}\left(u^2\right)_x = \varepsilon u_{xx}, \tag{5.21}$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Diese Gleichung ist zweiter Ordnung und passt nicht in dieses Kapitel.

Eine zweite Möglichkeit wäre zum Beispiel distributionelle Lösungen zu betrachten. Wir passen die Definition von distributioneller Lösung an für beschränkte Funktionen und nehmen zusätzlich die Anfangswertbedingung mit hinein:

Definition 5.11 *Wir nennen $u \in L^\infty\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\right)$ eine Integrallösung von (5.19), wenn für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gilt:*

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \left(u\ \varphi_t + F(u)\,\varphi_x\right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\ \ \varphi(x,0)\, dx = 0. \tag{5.22}$$

Dieses Integral ist so gewählt, dass die Integralgleichung für klassische Lösungen erfüllt ist. Denn für $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ und $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gilt mit partieller Integration nach t

beziehungsweise nach x, dass

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} u\ \varphi_t\ dxdt = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx - \iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} u_t\ \varphi\ dxdt,$$

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} F(u)\,\varphi_x dxdt = -\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} F(u)_x\,\varphi dxdt,$$

und (5.19) liefert (5.22). Und umgekehrt, wenn

$$u \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$$

ist und (5.22) erfüllt, dann folgt sowohl die Differentialgleichung im klassischen Sinne als auch die Anfangswertbedingung.

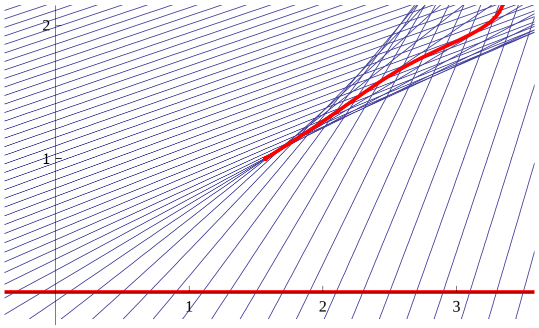

Abbildung 5.6: Welche Unstetigkeitskurve ist die richtige?

Die Frage ist nun, ob diese Definition auch reicht, um eine Lösung auszuwählen, die fast überall eindeutig definiert ist. Oder, anders gesagt, welchen charakteristischen Kurven sollen wir in dem mehrfach belegten Gebiet folgen? Eine vernünftige Lösung scheint zu sein, dass wir annehmen, dass es eine trennende Kurve gibt. An dieser trennenden Kurve wird die Lösung einen Sprung haben.

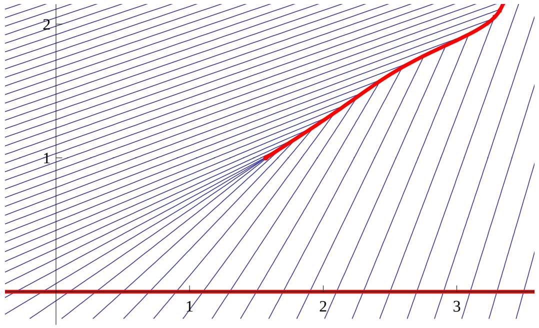

Abbildung 5.7: Vielleicht diese?

Nennen wir das Gebiet links von der Stoßwelle Ω_ℓ und rechts Ω_r. Die Trennkurve nennen wir S und wir nehmen an, dass sie C^1 ist. Links und rechts haben wir klassische Lösungen u_ℓ und u_r. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} \left(u\ \varphi_t + F(u)\,\varphi_x\right) dxdt = \\ &= \iint_{\Omega_\ell} \left(u_\ell\ \varphi_t + F(u_\ell)\,\varphi_x\right) dxdt + \iint_{\Omega_r} \left(u_r\ \varphi_t + F(u_r)\,\varphi_x\right) dxdt \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) \\ u_\ell \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma + \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_r) \\ u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_r d\sigma \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Weil dies für alle Testfunktionen φ gilt, folgt

$$\begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell = 0. \tag{5.24}$$

Wir kennen so die Richtung von S, denn senkrecht auf den Normalenvektor zeigt genau die Richtung der Trennkurve. Eine Parametrisierung von S findet man, weil $u_\ell > u_r$, also durch

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(0) &= S_0, \\ \vec{\gamma}\,'(\tau) &= \begin{pmatrix} F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau))) \\ u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

wenn S_0 der Anfang der Unstetigkeitskurve ist. Statt (5.25) kann man auch wie folgt parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau)))}{u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau))} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = S_0 \tag{5.26}$$

und man findet die Kurve $(x(t), t)$ durch

$$x'(t) = \frac{F(u_\ell(x(t), t)) - F(u_r(x(t), t))}{u_\ell(x(t), t) - u_r(x(t), t)}.$$

Die Geschwindigkeit der Unstetigkeit an der Stelle $S = x(t)$ ist $v_S = x'(t)$. Anders gesagt, es gilt:

Bedingung 5.12 (Die Rankine-Hugoniot-Bedingung) [2] [3]

$$(u_\ell - u_r)\; v_S = (F(u_\ell) - F(u_r)). \tag{5.27}$$

Diese Bedingung soll wie folgt gelesen werden. Das Teilgebiet, in dem die Unstetigkeitskurve liegen sollte, also das Gebiet, in dem mehrere charakteristische Kurven aufeinander treffen, wird sowohl durch charakteristische Kurven von rechts als auch durch charakteristische Kurven von links beschrieben (und sogar auch noch durch charakteristische Kurven dazwischen). Man definiert in diesem Teilgebiet u_ℓ durch die charakteristischen Kurven von links und u_r durch die charakteristischen Kurven von rechts. Auf dem Teilgebiet ist nun sowohl u_ℓ als u_r definiert und so auch die Bedingung in (5.27).

Beispiel 5.13 *Wir kommen zurück zu Beispiel 5.10. Welche Unstetigkeitskurve erfüllt die Rankine-Hugoniot-Bedingung? Für das Randwertproblem (5.15) gilt $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ und es folgt*

$$v_S = \frac{\frac{1}{2}u_\ell^2 - \frac{1}{2}u_r^2}{u_\ell - u_r} = \frac{u_\ell + u_r}{2}.$$

[2]Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887), Französischer Mathematiker und Artillerieoffizier.

[3]William John Macquorn Rankine (1820–1872), Schottischer Physiker, Bauingenieur und Dichter:

The Three Foot Rule

When I was bound apprentice and learnt to use my hands
Folk never talked of measures that came from foreign lands
Now I'm a British Workman, too old to go to school
So whether the chisel or file I hold, I'll stick to my three-foot rule.

Some talk of millimetres and some of kilograms
And some of decilitres to measure beer and drams
But I'm a British Workman, too old to go to school
So by pounds I'll eat, and by quarts I'll drink, and I'll work by my three-foot rule.

A party of astronomers went measuring the Earth
And 40 million metres they took to be its girth
Five hundred million inches though, go through from pole to pole
So let's stick to inches, feet and yards and the good old three-foot rule.
The great Egyptian pyramid's a thousand yards about
And when the masons finished it they raised a joyful shout
The chap that planned that building, I'm bound he was no fool
And now 'tis proved beyond a doubt he used a three-foot rule.

Here's health to every learned man that goes by common sense
And would not plague the workman by any vain pretence
But as for those philanthropists who'd send us back to school
Oh! bless their eyes, if ever they tries to put down the three-foot rule.

J. M. RANKINE

Wir können zeigen, dass die Unstetigkeitskurve durch $(x(t), t)$ mit $x(t) = \frac{1}{2}\pi t$ parametrisiert wird. Denn an der Stelle $\left(\frac{1}{2}\pi t, t\right)$ mit $t > 1$ treffen sich die linke und die rechte charakteristische Kurve für

$$s_r = -s_\ell = \mu(t),$$

wobei $\mu(t)$ die positive Lösung von $\mu = t \arctan \mu$ sei. Es gilt, dass

$$x'(t) = \frac{u_\ell + u_r}{2} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\left(\arctan s_\ell + \arctan s_r\right) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die passenden Bilder stehen in Abbildung 5.8 und 5.9. Die Kurve $\{(x(t), t); t \geq 1\}$ ist eine Stoßwelle.

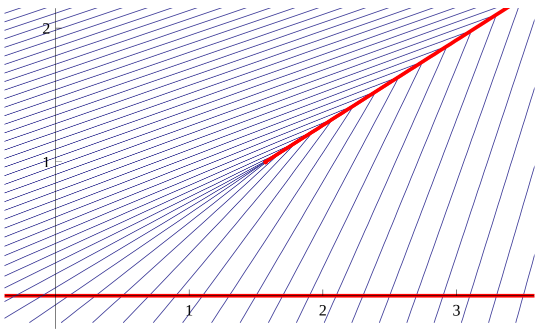

Abbildung 5.8: Die Unstetigkeitskurve, die die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Vergleichen Sie mit Abbildung 5.3

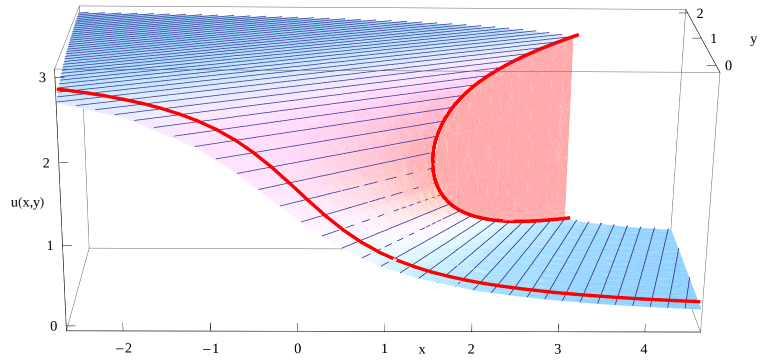

Abbildung 5.9: Skizze der Lösung, die die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt aus Abbildung 5.8

Aufgabe 5.7 *Wir betrachten das System aus Aufgabe 5.6 weiter:*

$$\begin{cases} u(x,y)u_x(x,y) + u_y(x,y) = 1 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

1. *Wie muss man Definition 5.11 anpassen wegen 1 auf der rechten Seite?*

2. *Zeigen Sie, dass die Bedingung (5.23) erfüllt ist für alle Testfunktionen φ mit $\iint_\Omega \varphi(x)\, dx = 0$. Dies reicht für (5.24).*

3. *Zeigen Sie, dass die Stoßwelle anfängt in*

$$(x_s, y_s) = \left(\tfrac{1}{4}e + \sqrt{2}, \sqrt{\tfrac{1}{2}e}\right).$$

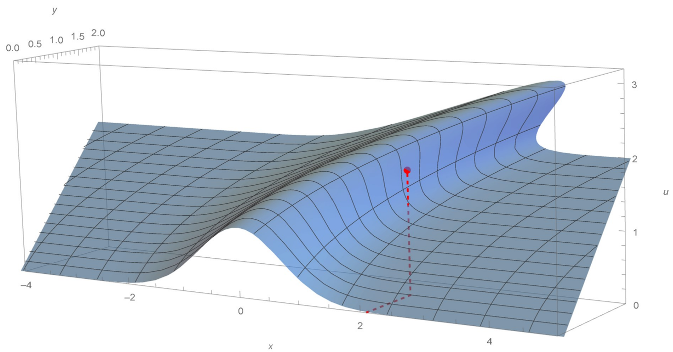

Abbildung 5.10: Die Funktion aus Aufgabe 5.6 mit der Stelle $(x_s, y_s, u(x_s, y_s))$ aus Aufgabe 5.7

5.2.2 Verdünnungswellen

Lösungen, wie sie in Definition 5.11 definiert sind, erlauben es, Anfangswerte u_0 in $L^\infty(\mathbb{R})$ zu nehmen. Betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u(x,t)\, u_x(x,t) + u_t(x,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{5.28}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Die Lösung mit Hilfe der charakteristischen Kurven findet man durch

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ T'(t) = 1 & \text{mit } T(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = u_0(s), \end{cases}$$

nämlich

$$\begin{cases} U(t) &= u_0(s), \\ x(t) &= s + t\, u_0(s), \\ T(t) &= t. \end{cases} \tag{5.30}$$

Für $s < 0$ finden wir $x(t) = s$ und so folgt $u(x,t) = 0$ für $x < 0$ und $t \geq 0$. Für $s \geq 0$ gilt $x(t) = s + t$, und es folgt $u(x,t) = 1$ für $x \geq t \geq 0$. Also

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0 \end{cases}$$

Diese Methode gibt uns aber keine Lösung auf der Menge

$$\{(x,t)\,; t > 0 \text{ und } x \in [0,t)\}\,.$$

Mathematisch gibt es viele Möglichkeiten, dieses Dreieck zu füllen. Wir geben mal drei an:

$$1)\quad u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \tag{5.31}$$

$$2)\quad u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \tag{5.32}$$

$$3)\quad u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ und } t \geq 0, \\ x/t & \text{für } x \in (0,t) \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Keine dieser drei Funktionen ist eine klassische Lösung. Die erste hat ein Problem auf der Geraden $x = t$; die zweite auf $x = \frac{1}{2}t$; die dritte sowohl auf $x = 0$ als auch auf $x = t$. Die Funktionen in 2) und 3) sind beide Integrallösungen. Welche würde physikalisch passen?

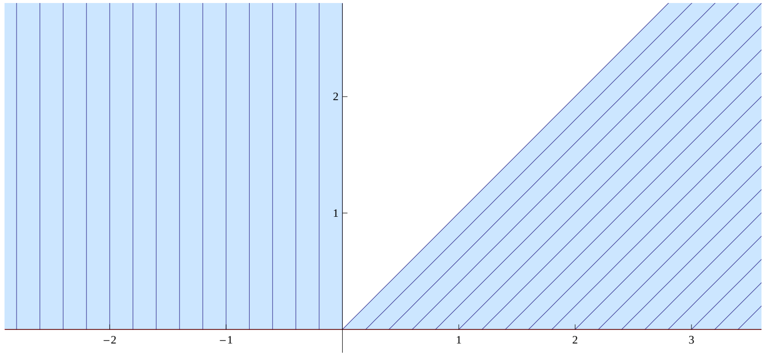

Abbildung 5.11: Wie füllt man das leere Dreieck?

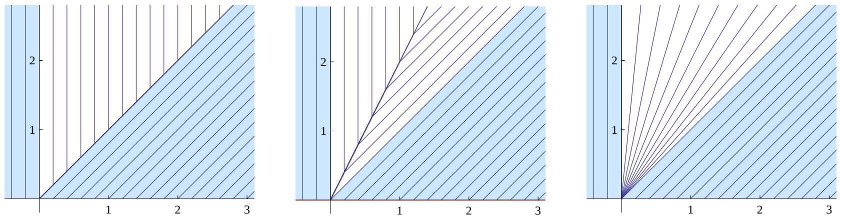

Abbildung 5.12: Einige Möglichkeiten: die in der Mitte und rechts wären mathematisch vertretbar; physikalisch sinnvoll ist wegen der Entropie-Bedingung nur die rechte Lösung.

Definition 5.14 *Sei $u(x,t)$ eine Lösung von (5.28). Wenn die Anfangsbedingung u_0 einen isolierten Sprung an der Stelle x_0 hat mit*

$$\ell := \lim_{x \uparrow x_0} u_0(x) < \lim_{x \downarrow x_0} u_0(x) =: r$$

und für ein $\varepsilon > 0$ gilt

- *u_0 fortgesetzt durch ℓ in x_0 liegt in $C^1(x_0 - \varepsilon, x_0]$,*
- *u_0 fortgesetzt durch r in x_0 liegt in $C^1[x_0, x_0 + \varepsilon)$,*

dann hat $u(x,t)$ eine Verdünnungswelle, *wenn gilt*

$$u(x,t) = \frac{x - x_0}{t} \quad \text{für} \quad \ell \leq \frac{x - x_0}{t} \leq r$$

für $t \in [0, t_0)$ mit $t_0 > 0$.

5.2.3 Physikalische Begründung

In der Physik gibt es die sogenannte Entropie-Bedingung. Grob kann man diese Bedingung wie folgt beschreiben: Man meide Unstetigkeitskurven, wenn sie nicht notwendig sind. Wenn die Geschwindigkeit $x'(t)$ einer charakteristischen Kurve $(x(t), t)$ rechts von einer Unstetigkeit größer wäre als die Geschwindigkeit einer charakteristischen Kurve links von dieser Unstetigkeit, bräuchte man keine Unstetigkeit, sondern hätte es durch eine Funktion, wie in (5.33), lösen können. Wenn für

$$u_t + F(u)_x = 0$$

die Funktion $F(u)_x$ eine Unstetigkeit in S hat, sagt man:

Bedingung 5.15 *Die Entropie-Bedingung ist erfüllt für eine Lösung von (5.19), wenn an einer Unstetigkeitsstelle S gilt*

$$F'(u_\ell) > F'(u_r). \tag{5.34}$$

Wenn $S = \{(\sigma(t), t)\,; t \in (t_1, t_2)\}$, dann ist mit (5.34) gemeint, dass

$$F'(\lim_{x \uparrow \sigma(t)} u(x,t)) > F'(\lim_{x \downarrow \sigma(t)} u(x,t)) \text{ für alle } t \in (t_1, t_2)\,.$$

Die Geschwindigkeit der charakteristischen Kurve an der Stelle (x, t) ist übrigens $F'(u(x, t))$, denn wenn $(x(\tau), t(\tau))$ eine charakteristische Kurve ist, gilt

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'(u(x(\tau), t(\tau))) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt $t = \tau$ und $x'(\tau) = F'(u(x(\tau), \tau))$.

Für eine streng konvexe Funktion F ist F' eine streng wachsende Funktion und bedeutet (5.34) $u_\ell > u_r$. Man sieht nun auch sofort, dass diese Entropie-Bedingung für einen Unterschied sorgt bezüglich der „Zeit"-Richtung. Bei charakteristischen Kurven war es nicht wesentlich, in welche Richtung man entlanggeht; die Rankine-Hugoniot und die Entropie-Bedingung sind richtungsabhängig.

Bemerkung 5.15.1 *Die Funktion u ist eine physikalische relevante Lösung von (5.19), wenn folgendes gilt:*

1. *u ist konstant entlang charakteristischen Kurven mit Ausnahme von Unstetigkeitskurve(n) S, und*
2. *wenn es eine Unstetigkeitskurve S gibt, dann ist da die Rankine-Hugoniot Bedingung und die Entropie-Bedingung erfüllt.*

Eine Lösung zu (5.28)-(5.29) mit Verdünnungswelle ist die dritte Möglichkeit (5.33). Eine Skizze findet man in Abbildung 5.13.

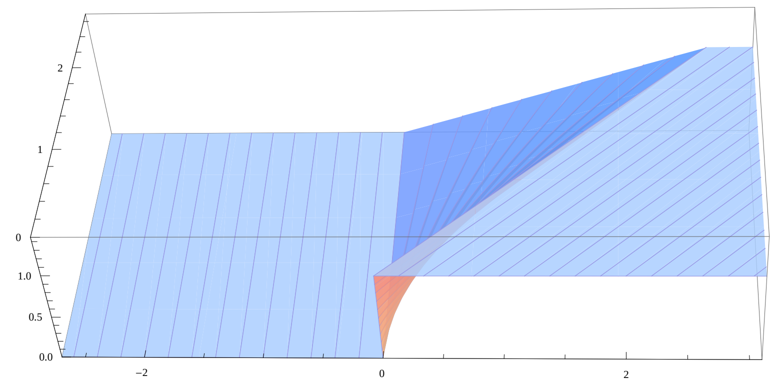

Abbildung 5.13: Eine physikalisch relevante Lösung zu (5.28)-(5.29).

5.3 Übersicht

Wir gehen davon aus, dass die Transversalitätsbedingung im Folgenden erfüllt ist. Übrigens, wenn man hier Lösen schreibt, bedeutet es, dass man den Satz von Picard-Lindelöf verwenden kann für das zugehörige Anfangswertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung. In konkreten Fällen kann man nur selten eine explizite Lösung finden.

Linear und semilinear mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. Die charakteristischen Kurven sind $t \mapsto x_0 + t\vec{v}$.
2. Man löse $U(t; x_0)$ aus

$$\begin{cases} U'(t) = f(x_0 + t\vec{v}, U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0) \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze
$$u(x_0 + t\vec{v}) := U(t; x_0)$$
und transformiere nach Standardkoordinaten mittels $x = x_0 + t\vec{v}$.

Linear und semilinear mit variablen Koeffizienten:

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \ \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. Man löse die charakteristischen Kurven $\vec{x}(t; x_0)$ aus
$$\begin{cases} \vec{x}\,'(t) = \vec{v}(\vec{x}(t)), \\ \vec{x}(0) = x_0 \ \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$
2. Man löse $U(t; x_0)$ aus
$$\begin{cases} U'(t) = f(\vec{x}(t), U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0) \ \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$
3. Setze
$$u(\vec{x}(t)) := U(t; x_0)$$
und transformiere nach Standardkoordinaten mittels $x = \vec{x}(t)$. Diese Transformation ist eindeutig; die Existenz ist nur lokal garantiert.

Quasilinear:

$$\begin{cases} \vec{v}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \ \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1\. & 2. Man löse gleichzeitig die charakteristischen Kurven $\vec{x}(t; x_0, u_0)$ und die Funktionen $U(t; x_0, u_0)$ entlang dieser Kurven aus
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ U(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{x}(t), U(t)) \\ f(\vec{x}(t), U(t)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \vec{x}(0) \\ U(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0(x_0) \end{pmatrix} \ \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze
$$u(\vec{x}(t)) := U(t; x_0, u_0)$$
und transformiere nach Standardkoordinaten mittels $x = \vec{x}(t; x_0, u_0)$. Für C^1-Funktionen $\vec{v}$ und u_0 existiert diese Transformation lokal und ist lokal eindeutig.

   Man definiert physikalisch begründete Stoßwellen mithilfe des schwachen Lösungsbegriffs, wenn die Eindeutigkeit der Transformation fehlt. Bei unstetigen Anfangsbedingungen können auch Verdünnungswellen physikalisch Sinn machen.

Aufgabe 5.8 *Die Lösung von*

$$\begin{cases} u(x,y)u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0 & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x < 0 \text{ und für } x > 1, \\ u(x,0) = 1 - x & \text{für } x \in [0,1], \end{cases}$$

die sowohl die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt und außerdem eine Verdünnungswelle hat, sieht aus wie in Abbildung 5.14.

1. *Berechnen Sie diese Lösung, indem Sie auf den verschiedenen Teilgebieten eine explizite Formel angeben.*
2. *Zeigen Sie, dass für diese Funktion gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\ dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\ dx$$

für alle $t \geq 0$.

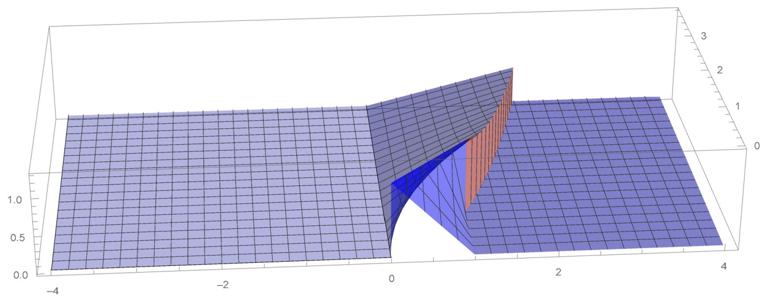

Abbildung 5.14: Skizze zu der Lösung aus Aufgabe 5.8

.

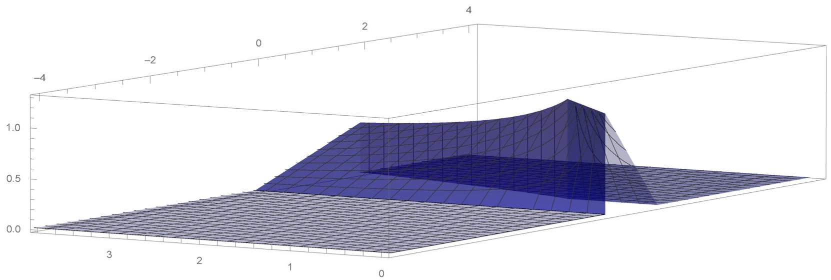

Abbildung 5.15: Die gleiche Lösung aus einem anderen Winkel

.