

Partielle Differentialgleichungen

Woche 6

Klassifizierung zweiter Ordnung

6.1 Einfachen Fälle als Begründung

6.1.1 Das Symbol

Wir betrachten in diesem Abschnitt partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen und mit konstanten Koeffizienten. Das heißt, diese Differentialgleichungen sind wie folgt:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (6.1)$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Eine solche Differentialgleichung ist rein zweiter Ordnung, wenn $d = e = f = 0$:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \varphi \quad (6.2)$$

Definition 6.1 Sei $L(\partial_x, \partial_y)$ ein linearer partieller Differentialoperator. Dann nennt man $L(\xi, \eta)$ das Symbol des Operators.

Bemerkung 6.1.1 Man ersetzt ∂_x durch ξ und ∂_y durch η . Das Symbol ist ein Polynom in (ξ, η) .

Bemerkung 6.1.2 Auch bei linearen partiellen Differentialoperatoren $L(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ in höheren Dimensionen und bei höherer Ordnung definiert man das Symbol durch $L(\xi)$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Der Grad des Polynoms ist dann genau die Ordnung des Differentialoperators.

Für (6.1) beziehungsweise (6.2) hat man diese Symbole

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f, \\ L_0(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (6.1), (6.2) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} L(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi, \\ L_0(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi. \end{aligned}$$

Wenn $a \neq 0$ gilt, kann man ohne Verlust der Allgemeinheit $a = 1$ setzen in (6.1). Auf den Fall, dass $a = 0$, kommen wir noch zurück.

6.1.2 Zerlegung des Symbols in Linearterme

Für $a = 1$ versuchen wir das Symbol in Linearterme zu zerlegen:

$$L(\xi, \eta) = (\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2),$$

$$L_0(\xi, \eta) = (\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta).$$

Die Idee, die dahintersteckt, ist, dass man dann vielleicht die Differentialgleichung als zwei Gleichungen erster Ordnung lösen kann:

$$L_0(\partial_x, \partial_y)u = (\partial_x - \tau_1\partial_y)(\partial_x - \tau_2\partial_y)u.$$

Wenn es eine solche Zerlegung gibt, dann sind τ_1, τ_2 die Lösungen der algebraischen Gleichung¹

$$\tau^2 + 2b\tau + c = 0. \quad (6.3)$$

Es gibt grundsätzlich drei Möglichkeiten:

I. wenn $b^2 > c$ folgt $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ und $\tau_1 \neq \tau_2$.

II. wenn $b^2 = c$ folgt $\tau_1 = \tau_2 \in \mathbb{R}$.

III. wenn $b^2 < c$ folgt $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\tau_1 = \overline{\tau_2}$.

Dies sieht man sofort, indem man (6.3) löst:

$$\tau_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c} \text{ oder } \tau_{1,2} = -b \pm i\sqrt{c - b^2}.$$

Wir werden nun diese drei Fälle detaillierter anschauen.

¹Man kann $L_0(\xi, \eta)$ in ein Produkt von Lineartermen $(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta)$ zerlegen, wenn $L_0(\xi, \eta) = 0$ für $\xi = \tau_i\eta$. Also findet man diese τ_i als Nullstellen von $\tau \mapsto L_0(\tau\eta, \eta) = (\tau^2 + 2b\tau + c)\eta^2$.

zu I. L_0 : Wenn $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ und $\tau_1 \neq \tau_2$ gilt, so folgt

$$(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2.$$

Man kann (6.2) (mit $a = 1$) umschreiben als

$$\begin{cases} (\partial_x - \tau_2\partial_y)v = \varphi, \\ (\partial_x - \tau_1\partial_y)u = v, \end{cases} \quad (6.4)$$

ein System erster Ordnung. Dieses System kann man in zwei Schritten als zwei Transportgleichungen lösen mit zwei unabhängigen charakteristischen Richtungen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\tau_1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau_2 \end{pmatrix}.$$

L : Wenn $\tau_1 \neq \tau_2$, dann kann man für (6.1) $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ finden derart, dass

$$(\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + \sigma_1\sigma_2.$$

Dann kann man (6.1) (mit $a = 1$) umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \partial_x - \tau_1\partial_y & 0 \\ 0 & \partial_x - \tau_2\partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ f - \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Dieses System lässt sich nicht mehr als zwei aufeinanderfolgenden Transportgleichungen lösen, aber man kann es trotzdem mit ähnlichen Methoden angehen.

Wir kommen nun zurück auf $a = 0$. Für $a = 0$ hat man

$$0\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = (2b\xi + c\eta)\eta.$$

Für $b \neq 0$ hat man eine Zerlegung mit zwei unabhängigen charakteristischen Richtungen wie vorher. Wenn $b = 0$ gilt, wird L_0 eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in y .

zu II. L_0 : Wenn $\tau_1 = \tau_2$, dann funktioniert diese Aufspaltung nicht unbedingt. Für (6.2) findet man $(\partial_x - \tau_1 \partial_y)^2 u = \varphi$ und dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

L : Für (6.1) findet man

$$(\partial_x - \tau_1 \partial_y + \sigma_1)^2 u + (\lambda \partial_x - \mu \partial_y + \rho) u = \varphi.$$

Wenn $\mu \neq \lambda \tau_1$ gilt, kann man diese letzte Differentialgleichung nicht als System erster Ordnung schreiben. Ein typisches Beispiel einer solchen Differentialgleichung ist

$$u_{xx} - u_y = \varphi.$$

zu III. Wenn die Wurzeln von (6.3) nicht reell sind, scheint es zuerst hoffnungslos, die Differentialgleichung für L_0 oder L zu spalten, denn wie soll man mit komplexen Termen umgehen? Ein typisches Beispiel ist

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (6.6)$$

Das zugehörige Symbol ist $L(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 = (\xi - i\eta)(\xi + i\eta)$. Lässt man komplexe Zahlen zu, dann kann man (6.6) mit $\varphi = 0$ auch schreiben als

$$(\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)u = 0$$

und man findet die folgenden Lösungen

$$u(x, y) = u_1(x + iy) + u_2(x - iy), \quad (6.7)$$

wobei u_1 und u_2 beliebige differenzierbare Funktionen sind. Für komplexe Funktionen macht dies Sinn².

Bemerkung 6.1.3 Man kann sogar reelle Lösungen finden, wenn man für u_1 eine komplex-analytische Funktion nimmt mit reellen Koeffizienten und für u_2 den anti-analytischen Partner. Analytisch heißt, dass die Funktion lokal als Potenzreihe zu schreiben ist: Es gibt $R > 0$ derart, dass

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < R.$$

Wenn man $a_n \in \mathbb{R}$ nimmt und u_2 wie folgt definiert

$$u_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{z - z_0})^n,$$

so hat u_2 den gleichen Konvergenzradius wie u_1 , ist eine anti-analytische Funktion (bedeutet 'analytisch' in $x - iy$) und man findet, dass $(x, y) \mapsto u_1(x + iy) + u_2(x - iy)$ reell ist.

²Eine Funktion, die (6.6) erfüllt, nennt man harmonisch. In einer Vorlesung Funktionentheorie lernt man, dass der Realteil einer analytischen Funktion harmonisch ist. Das gleiche gilt für den Realteil einer anti-analytischen Funktion. Eine Funktion f ist analytisch auf $\Omega_{\mathbb{C}} = \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in \Omega\}$, wenn f komplex differenzierbar ist auf $\Omega_{\mathbb{C}}$. Eine Funktion f ist anti-analytisch, wenn \bar{f} komplex differenzierbar ist. Man findet auch so Lösungen wie in (6.7), nämlich durch

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) + \operatorname{Re}(g(x - iy)),$$

wobei f und g (komplex) differenzierbare Funktionen sind.

Aufgabe 6.1 Wenn möglich zerlegen Sie das Symbol zu der Differentialgleichung und geben eine möglichst allgemeine Form einer Lösung.

1. $u_{xx} - u = 0$ in \mathbb{R} ;
2. $u_{xx} - 4u_{yy} = 0$ in \mathbb{R}^2 ;
3. $u_x + u_y + u_z = 0$ in \mathbb{R}^3 ;
4. $u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} = 0$ in \mathbb{R}^3 .

6.2 Standardbeispiele zu diesen Fällen

Wir werden einige typische Gleichungen zu diesen unterschiedlichen Fällen betrachten.

6.2.1 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$

Betrachten wir $u_{xx} - u_{yy} = f$. Diese Gleichung kann man auch schreiben als

$$(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y)u = f \quad (6.8)$$

und man könnte sie lösen, indem man nacheinander den charakteristischen Kurven in Richtung $(1, -1)$ und in Richtung $(1, 1)$ folgt. In dem neuen Koordinatensystem

$$x = s + t \text{ und } y = s - t$$

wird dies etwas leichter. Setzen wir $U(s, t) = u(s + t, s - t)$ und $F(s, t) = f(s + t, s - t)$, so ändert sich die Differentialgleichung (6.8) über

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 - \partial_y^2)U\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \\ = \left(\frac{1}{4}U_{ss} + \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt}\right) - \left(\frac{1}{4}U_{ss} - \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt}\right) \end{aligned}$$

in

$$\partial_s \partial_t U = F. \quad (6.9)$$

Welche Art von Randwertbedingungen würde eindeutig eine Lösung bestimmen?

Betrachten wir den Fall $\Omega = B_1(0)$. Für (6.9) finden wir

$$\partial_t U(s, t) = \partial_t U(\psi(t), t) + \int_{\psi(t)}^s F(\sigma, t) d\sigma \quad (6.10)$$

und als nächstes

$$U(s, t) = U(s, \varphi(s)) + \int_{\varphi(s)}^t \partial_t U(\psi(\tau), \tau) d\tau + \int_{\varphi(s)}^t \int_{\psi(\tau)}^s F(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (6.11)$$

Hier beschreibt $t = \varphi(s)$ einen Randteil für t als Funktion von s und $s = \psi(t)$ beschreibt einen Randteil für s als Funktion von t . Um die Integrale in (6.11) durch eine Bedingung am Rande festzulegen, hat man die Möglichkeit „rechts unten“ und „links oben“; ähnlich für (6.10) wird es „links unten“ oder „rechts oben“. Betrachten wir den Fall „unten“, dann hat man $\varphi(s) = -\sqrt{\frac{1}{2} - s^2}$ und $\psi(t) = -\sqrt{\frac{1}{2} - t^2}$. Für ein Paar (x, y) werden die Integralkurven in Abbildung 6.1 skizziert.

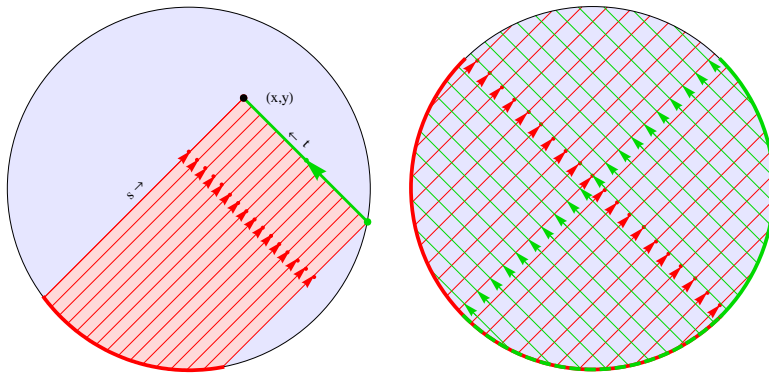


Abbildung 6.1: Links: Um in (x, y) den Wert $u(x, y)$ zu bestimmen, braucht man zum Beispiel u_t auf dem roten Randteil und u im grünen Randpunkt. Rechts: Um u auf der ganzen Kreisscheibe festzulegen, passt es u_t auf dem roten Randteil und u auf dem grünen Randteil vorzugeben.

Schreiben wir $\Gamma_{[\alpha, \beta]} = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) ; \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$. Wenn man u auf der ganzen Kreisscheibe festlegen will, braucht man

$$\partial_t U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]} \text{ und } U \text{ auf } \Gamma_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]}.$$

Aus Symmetriegründen, man vertausche s und t , passt auch

$$U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]} \text{ und } \partial_s U \text{ auf } \Gamma_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]}.$$

Auf einem Rand, auf dem U und $\partial_\nu U$ bekannt sind und wobei ν eine nicht-tangentiale Richtung hat, und wenn $U \in C^1$ gilt, kennt man alle Richtungsableitungen. So kann man sich sogar davon überzeugen, dass auch folgendes passt:

$$U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]} \text{ und } \partial_\nu U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]}.$$

Wenn man sich dieses Beispiel genau anschaut, kann man folgendes Ergebnis bekommen:

Proposition 6.2 Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^2 mit $\partial\Omega \in C^1$. Man setzt

$$\Gamma_R = \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt zwei aufwärts gerichtete charakteristische Kurven in } x\},$$

$$\Gamma_G = \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt nur eine aufwärts gerichtete charakteristische Kurve in } x\}.$$

Wenn die Randwerte es erlauben (stetig sind und mögliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen), kann man mit Hilfe der charakteristischen Kurven, eine (distributionelle) Lösung in $C(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_0 & \text{auf } \Gamma_R \cup \Gamma_G, \\ \partial_\nu u = v_0 & \text{auf } \Gamma_R, \end{cases}$$

konstruieren. Wenn die Randwerte zweimal differenzierbar sind und mögliche zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen, ist diese Funktion u sogar in $C^2(\bar{\Omega})$.

Bemerkung 6.2.1 Kompatibilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, wenn Γ_R oder Γ_G nicht zusammenhängend sind oder tangential an charakteristischen Kurven verlaufen.

Beweis. Die Konstruktion einer Lösung entlang charakteristischer Kurven liefert die Existenz einer schwachen Lösung. Ist diese Lösung eindeutig? Ja, ein direkter Beweis ist sehr geometrisch. Er geht zurück auf $U_{st} = F$. Man sucht eine

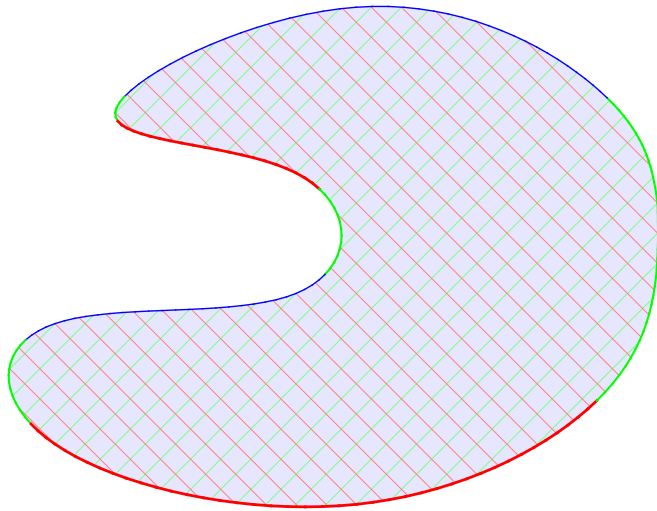


Abbildung 6.2: Auf dem roten Rand Γ_R gibt man u und $\partial_\nu u$ an, auf dem grünen Γ_G nur u und auf dem blauen nichts, und man hat höchstens eine Lösung.

Zick-Zack-Kurve, entlang welcher s konstant oder t konstant ist und die auf dem roten Rand anfängt.

Und wieso liegt die Lösung in $C^2(\bar{\Omega})$, wenn die Randwerte es erlauben? Erstens soll u_0 und v_0 genügend glatt sein. Zweitens, wie man in Abbildung 6.2 sehen kann, ist Γ_R und auch Γ_G nicht unbedingt zusammenhängend. Um eine $C^2(\bar{\Omega})$ -Lösung zu finden, soll jeder „Sprung“ von einer Komponente $\Gamma_R \cup \Gamma_G$ zu $\partial\Gamma_R$ und $\partial\Gamma_G$ kompatibel sein. ■

Wir können noch einen Schritt weiter gehen:

Proposition 6.3 Sei $L, T \in \mathbb{R}^+$ und sei $(0, L) \times (0, T)$ das

Gebiet in \mathbb{R}^2 . Sei f, u_ℓ, u_r, u_0 und v_0 gegeben. Wenn

$$\begin{cases} u_{yy}(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y) & \text{für } (x, y) \in (0, L) \times (0, M), \\ u(0, y) = u_\ell(y) & \text{für } y \in (0, M), \\ u(L, y) = u_r(y) & \text{für } y \in (0, M), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0, L], \\ u_y(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0, L], \end{cases} \quad (6.12)$$

eine Lösung $u \in C^2([0, L] \times [0, M])$ hat, dann kann man diese Lösung berechnen mit Hilfe der charakteristischen Kurven. Dieses Randwertproblem hat also höchstens eine klassische Lösung.

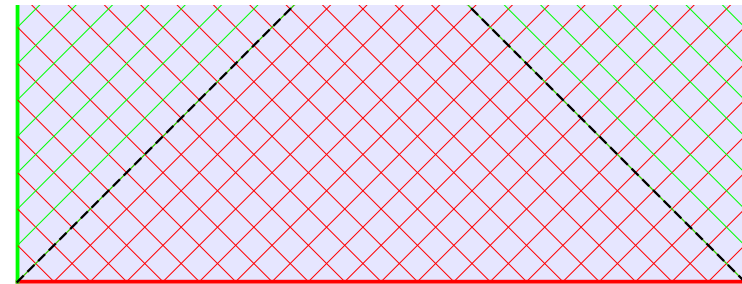


Abbildung 6.3: Unten zwei, links und rechts eine und oben keine. So kann man die passenden Randbedingungen für (6.12) beschreiben.

Beweis. Man soll bemerken, dass wenn $u_0(x)$ gegeben ist und $u(x, 0) = u_0(x)$ gilt, man auch $u_x(x, 0)$ kennt, nämlich $u_x(x, 0) = u'_0(x)$. Weil auch $u_y(x, 0) = v_0(x)$ auf $[0, L] \times \{0\}$ gegeben ist, findet man auf $[0, L] \times \{0\}$ alle Richtungsableitungen durch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} u(x, 0) = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} u_x(x, 0) \\ u_y(x, 0) \end{pmatrix}$$

und also auch U_t und U_s . Für die vertikalen Ränder braucht man nur $U = u = u_{\ell/r}$. Man findet da u_y und U_s oder U_t und so auch wieder alle Richtungsableitungen. Wenn $M > L$, dann kann man schrittweise hochklettern. ■

Aufgabe 6.2 Zeigen Sie, dass man jede Differentialgleichung der Form $u_{xx} + au_{xy} + bu_{yy} = f$ mit $a^2 > 4b$ durch eine Koordinatentransformation $u(x, y) = U(s, t)$ mit

$$s = c_0x + c_1y \text{ und } t = c_2x + c_3y$$

umformen kann in $U_{ss} - U_{tt} = F$.

6.2.2 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$

Statt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ werden wir wechseln zu $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Betrachten wir also die partielle Differentialgleichung $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = f$. Wir nehmen auch ein spezielles Gebiet, nämlich die Einheitskugel $B_1(0)$ und ändern auch noch ein Vorzeichen. Das heißt, wir betrachten

$$-\Delta u = f \text{ auf } B_1(0). \quad (6.13)$$

Wir betrachten eine besondere Funktion:

Definition 6.4 Die Greensche Funktion $G : \overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)} \rightarrow [0, \infty]$ für (6.13) wird definiert durch

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\log \left(\left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) - \log (\|x - y\|^2) \right). \quad (6.14)$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

Lemma 6.5 Für die Funktion $x \mapsto G(x, y)$ aus (6.14) gilt:

1. Symmetrie: $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in \overline{B_1(0)}$;
2. Sie ist unendlich oft differenzierbar für $x \neq y$, und $x \mapsto G(x, y)$ ist harmonisch auf $B_1(0) \setminus \{y\}$, das heißt, $\Delta_x G(x, y) = 0$ für alle $x \in B_1(0) \setminus \{y\}$;
3. sie erfüllt $G(x, y) = 0$ für $\|x\| = 1$ und $y \in B_1(0)$.

Eine wichtige Eigenschaft von G sehen wir erst später:

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta_y(x),$$

die Delta-Distribution an der Stelle y .

Beweis. Weil

$$\begin{aligned} & \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ &= \langle x \|y\|, x \|y\| \rangle - 2 \left\langle x \|y\|, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle + \left\langle \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + 1 \end{aligned}$$

sieht man, dass $G(x, y) = G(y, x)$.

Man findet, dass G unendlich oft differenzierbar ist sowohl in x als auch in y , wenn $x \notin \{y, \|y\|^{-2}y\}$. Auf $\overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)}$ trifft dies zu, wenn $x \neq y$. Für $x, y \in B_1(0)$ mit $x \neq y$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta_x \log (\|x - y\|^2) &= \nabla_x \cdot \nabla_x \log (\|x - y\|^2) \\ &= \nabla_x \cdot \frac{2(x - y)}{\|x - y\|^2} = 2 \frac{2}{\|x - y\|^2} - \frac{4(x - y) \cdot (x - y)}{\|x - y\|^4} = 0. \end{aligned}$$

Weil

$$\log \left(\left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) = \log \left(\left\| x - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 \right) + \log (\|y\|^2),$$

ist auch die Funktion $x \mapsto \log \left(\left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right)$ harmonisch auf $B_1(0)$, diesmal sogar für alle $y \in B_1(0)$.

Für $\|y\| = 1$ findet man $G(x, y) = 0$ und dies gilt wegen der Symmetrie auch wenn $\|x\| = 1$. ■

Sei u eine Lösung von $-\Delta u = f \in C(\overline{B_1(0)})$. Dann gilt, mit ν dem auswärtigen Normalenvektor und Gauß, dass

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} G(x, y) f(y) dy &= - \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{\partial(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x))} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta G(x, y) u(y) dy \right) \\ &= \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Für $y \in \partial B_\varepsilon(x)$ gilt

$$G(x, y) = \mathcal{O}(\log \varepsilon)$$

und mit $\nu_y = -\frac{y-x}{\|y-x\|}$ auf $\partial B_\varepsilon(x)$, dass

$$-\partial_{\nu_y} G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^2} \cdot \nu_y + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1).$$

Es folgt für $\varepsilon \downarrow 0$, weil $\|\nabla u\|_\infty$ beschränkt ist, dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \mathcal{O}(\log \varepsilon) \rightarrow 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} -\partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1) \right) (u(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \rightarrow u(x). \end{aligned}$$

Zusammen wird es:

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &\quad - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Diese Formel liefert uns eine Eigenschaft einer Lösung zu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0), \\ u = u_0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (6.16)$$

Wir fassen dieses Ergebnis zusammen in:

Proposition 6.6 Sei G die Funktion in (6.14) und seien $f \in C(\overline{B_1(0)})$ und $u_0 \in C(\partial B_1(0))$. Wenn $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ eine Lösung ist von (6.16), dann gilt (6.15).

Die interessante Frage wäre, ob man, wenn u_0 und f gegeben sind, eine Lösung u von (6.16) mit Hilfe von

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u_0(y) d\sigma_y. \quad (6.17)$$

finden würde. Das ist tatsächlich so, aber eine solche Aussage braucht noch einen Beweis. Dann hätte man die Existenzfrage geklärt.

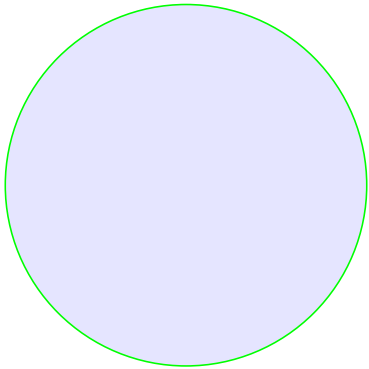


Abbildung 6.4: Rundherum u vorschreiben gibt eine eindeutige Lösung bei $-\Delta u = f$. Siehe Proposition 6.6.

Nehmen wir an, diese Existenz-Frage sei geklärt. Die nächste Frage nach Hadamard ist dann, ob (6.17) die einzige Lösung ist zu (6.16). Diese Frage lässt sich sofort beantworten:

Proposition 6.7 Zu (6.16) gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$.

Beweis. Nehmen wir an, es gibt zwei Lösungen, die wir u_1 und u_2 nennen. Dann ist $w = u_1 - u_2$ eine harmonische Funktion

und es gilt $w = 0$ auf $\partial B_1(0)$. Wegen Korollar 4.5 hat w kein Extremum innerhalb von $B_1(0)$. Es folgt, dass $w \leq 0$ auf $B_1(0)$. Ähnliches gilt für $-w$. Dann gilt also $w = 0$ auf $\overline{B_1(0)}$ und u_1 und u_2 wären identisch. ■

Bemerkung 6.7.1 Diesen letzten Beweis kann man übrigens verwenden für beliebige Gebiete.

Aufgabe 6.3 Die Funktion $u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2)$ ist eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = 1 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

Ebenso ist $u(x_1, x_2) = \frac{1}{10}x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = x_1 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1, \end{cases}$$

und ist $u(x_1, x_2) = \frac{1}{96}(3 + 7x_1^2 - x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = x_1^2 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

• Können Sie eine Lösung finden für das folgende Randwertproblem?

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

6.2.3 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$

Diese Gleichung erscheint bei der Wärmeleitung. Weil y die Zeit darstellt, werden wir t statt y benutzen. Ein einfaches, physikalisches Problem wäre die Temperaturverteilung in einem Stab. Wir nehmen an, dieser Stab ist isoliert, außer an den beiden Enden. Als Anfangstemperatur nehmen wir 20 und beide Enden halten wir auf 0. Das Problem wird:

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T). \end{cases}$$

Wenn man $u(x, 0) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$ statt 20 hätte, findet man als Lösung

$$u(x, t) = e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Man kontrolliert direkt, dass sowohl die Differentialgleichung als auch die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt sind. Hat man $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{138} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$ folgt, weil die Differentialgleichung linear ist, als Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{138} c_k e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Als nächstes wenden wir an, dass

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right) \quad \text{für } 0 < x < \ell$$

und versuchen für die Lösung

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right). \quad (6.18)$$

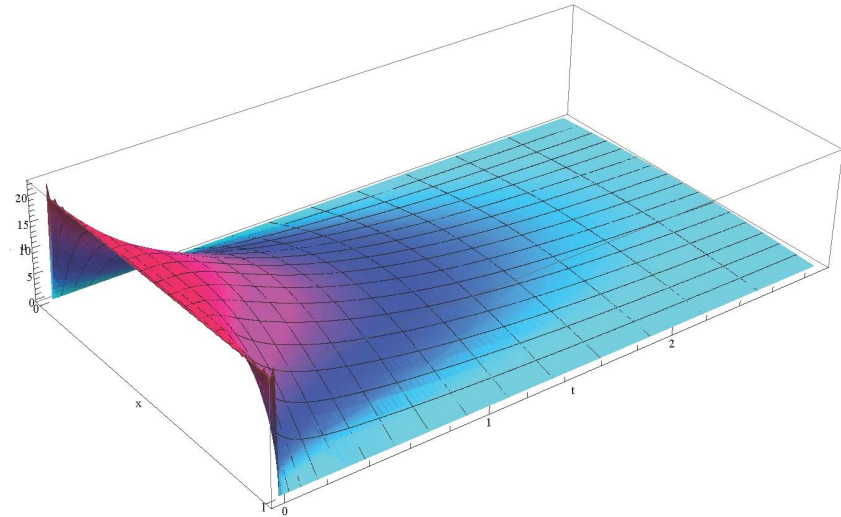


Abbildung 6.5: Eine Skizze der Funktion in (6.18)

Konvergiert die Reihe in (6.18)? Erfüllt sie die Differentialgleichung? Erfüllt sie die Rand- und Anfangsbedingungen? Die Antworten lauten: ja, ja und fast überall. Für die Beweise dieser Aussagen braucht man Kenntnisse von Fourierreihen.

Das Bild in Abbildung 6.5 gibt uns Hoffnung, dass man tatsächlich mit einer konvergenten Reihe zu tun hat. In Abbildung 6.6 finden Sie die Approximationen für $\ell = 1$ und kleine t mit endlich vielen Termen an.

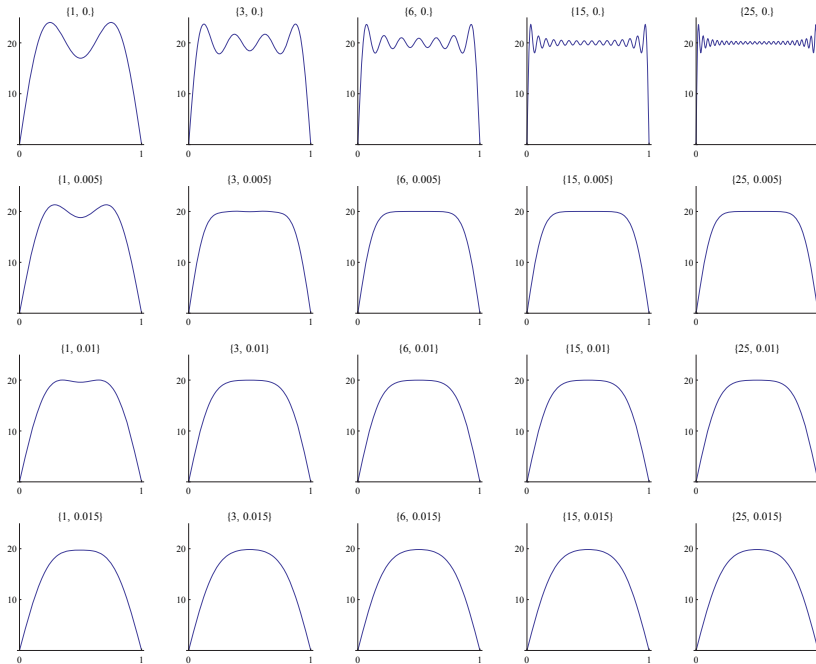


Abbildung 6.6: Skizzen einiger Funktionen die (6.18) approximieren, wo ∞ ersetzt ist durch n , für $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$ und für fest gewählte $t \in \{0, 0.005, 0.01, 0.015\}$. Nach rechts ist n zunehmend; nach unten wird t größer.

Schreibt man

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \left(e^{-\ell^{-2}\pi^2 t} \right)^{(2k+1)^2} \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x \right), \quad (6.19)$$

dann folgt $e^{-\ell^{-2}\pi^2 t} < 1$ für $t > 0$ und man zeigt, dass die Reihe

in (6.19) absolut konvergent ist. Innerhalb des Konvergenzradius ist das Ableiten nach $z := e^{-\ell^{-2}\pi^2 t}$ wohldefiniert und mit Hilfe der Kettenregel existiert auch die Ableitung nach t . Ähnliches gilt für höhere Ableitungen und Ableitungen nach x . Weil man so den Limes in den Ableitungen und den Limes in der Summe vertauschen kann für $t > 0$, folgt aus

$$(\partial_t - \partial_x^2) e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x \right) = 0,$$

dass die Differentialgleichung erfüllt ist für $t > 0$. Diese absolute Konvergenz liefert auch

$$u(0, t) = 0 = u(\ell, t) \text{ für } t > 0.$$

Die Stetigkeit von u bei $t = 0$ ist nur erfüllt für $x \in (0, \ell)$. Um dies zu zeigen, kann man eine Version des Konvergenztests von Abel verwenden.

6.2.4 Intermezzo zum Lemma von Abel

Lemma 6.8 (Abel) Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ für $r \in [0, 1]$ und es gilt

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ einen Konvergenzradius $R \geq 1$. Also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konvergiert für $|r| < 1$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\sum_{n=N}^{\infty} a_n| < \varepsilon$ für alle $N > N_\varepsilon$. Dann folgt für $m > N > N_\varepsilon$, dass

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \right| < 2\varepsilon. \quad (6.20)$$

Außerdem gilt für $m > N$, dass

$$a_n r^n = a_n r^m + a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^m a_n r^n &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{n=N}^m a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k) \\ &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^m a_n r^n \right| &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n r^m \right| + \left| \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n \right| r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \left| \sum_{n=N}^k a_n \right| |r^{k+1} - r^k| \\ &\leq 2\varepsilon r^m + \sum_{k=N}^{m-1} 2\varepsilon |r^{k+1} - r^k| = 2\varepsilon r^N \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

und ähnlich wie in (6.20) hat man

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n \right| \leq 4\varepsilon. \quad (6.21)$$

Die Konvergenz von $\sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n$ ist also gleichmäßig bezüglich $r \in [0, 1]$.

Betrachte das Polynom $p(r) = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n r^n$. Nehme $\delta > 0$ derartig, dass $|r - 1| < \delta$ impliziert

$$|p(1) - p(r)| < \varepsilon, \quad (6.22)$$

so folgt aus (6.20), (6.21) und (6.22), dass

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \right| < 7\varepsilon$$

und somit das Ergebnis im Lemma. \blacksquare

6.2.5 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$

Wenn wir versuchen auf ähnliche Art das folgende Problem zu lösen

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T), \end{cases}$$

erhält man die Formel

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right). \quad (6.23)$$

Auch hier müssen wir uns fragen, ob diese Reihe konvergiert?

In Abbildung 6.6 stehen Skizzen zu den ersten Termen aus (6.18) und in Abbildung 6.7 ähnliche aus (6.23):

$$u_n(x, t) = 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right) \quad (6.24)$$

Es hat den Anschein, dass die Formel aus (6.24) nicht konvergiert für $t = .01$. Kann man sich mit analytischen Mitteln überzeugen?

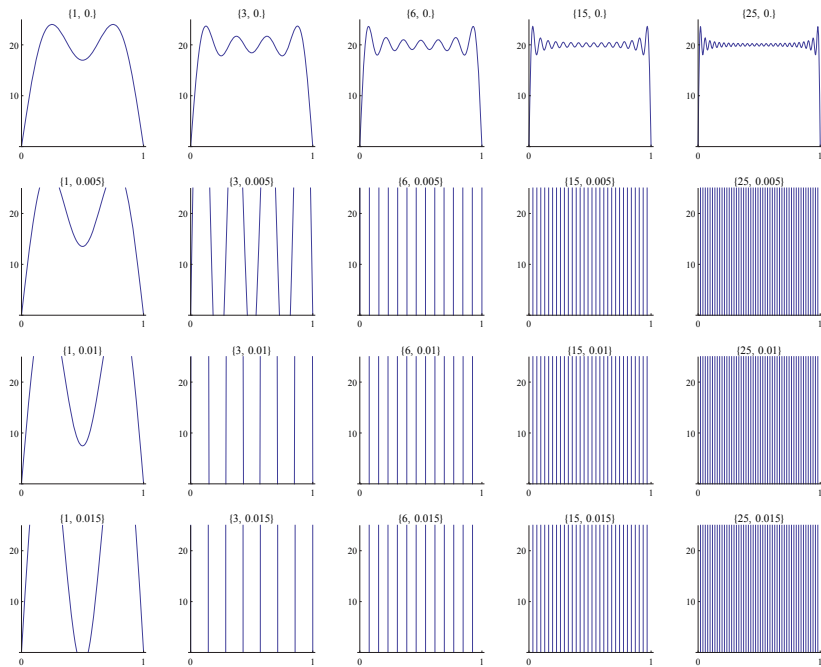


Abbildung 6.7: Skizzen zu den Funktionen

$$x \mapsto 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{(2k+1)^2 \pi^2 t} \sin((2k+1)\pi x)$$

für $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$ und $t \in \{0, 0.005, 0.01, 0.015\}$. Man vergleiche mit den Bildern in Fig. 6.6. Anscheinend gibt es Probleme mit der Konvergenz!

6.2.6 Welche Randbedingungen passen?

Wir haben keineswegs jetzt schon den kompletten Beweis gegeben, welche Randbedingungen zu einem wohldefinierten Randwertproblem im Sinne von Hadamard führen werden. Die Vermutungen kann man jedoch schon mal bildlich darstellen. Siehe Abbildung 6.8.

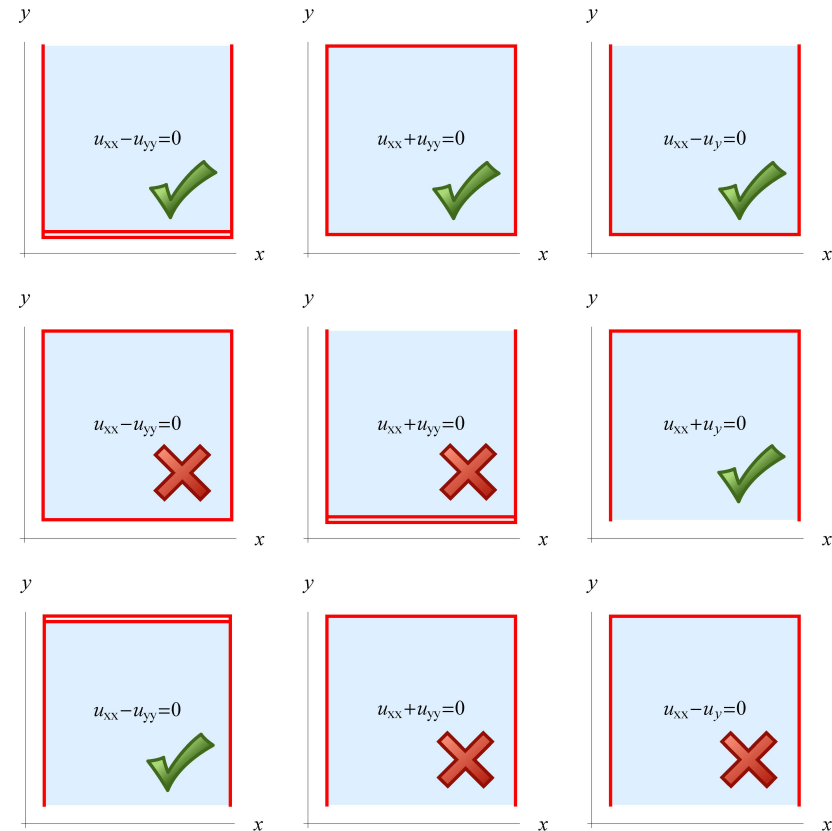


Abbildung 6.8: Mögliche Randbedingungen bei den verschiedenen Differentialgleichungen. Ein roter Strich bedeutet, dass man einen Randwert vorschreibt. Bei zwei Strichen braucht es einen zweiten unabhängigen Randwert. Es gibt wohl-definierte (✓) und nichtwohl-definierte Probleme (✗) im Sinne von Hadamard. Zu der Aussage in fast jedem dieser Beispiele gehört ein nicht-trivialer Beweis.

6.3 Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

6.3.1 In zwei Dimensionen

Die allgemeine Form einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sahen wir schon in (6.1):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (6.25)$$

mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Das Symbol ist

$$L(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f. \quad (6.26)$$

Definition 6.9 Sei das Symbol wie in (6.26). Dann heißt (6.25)

- *elliptisch*, wenn es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $L(\xi, \eta) = \lambda$ die Gleichung einer Ellipse darstellt;
- *hyperbolisch*, wenn es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $L(\xi, \eta) = \lambda$ die Gleichung einer Hyperbel darstellt;
- *parabolisch*, wenn es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $L(\xi, \eta) = \lambda$ die Gleichung einer Parabel darstellt.

Bemerkung 6.9.1 Wenn a, \dots, e von x und y abhängt, dann kann es sein, dass der Typ verschieden ist an verschiedenen Stellen. Hyperbolisch und elliptisch wird bestimmt durch a, b, c .

Lemma 6.10 Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *i.* Wenn $L(\xi, \eta) = \lambda$ eine Ellipse darstellt, dann gilt $b^2 < ac$.

ii. Wenn $b^2 < ac$ gilt, dann beschreibt $L(\xi, \eta) = \lambda$ mit $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ entweder eine Ellipse oder einen Punkt oder die leere Menge.

- *i.* Wenn $L(\xi, \eta) = \lambda$ eine Hyperbel darstellt, dann gilt $b^2 > ac$.
- ii.* Wenn $b^2 > ac$ gilt, dann beschreibt $L(\xi, \eta) = \lambda$ mit $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ entweder eine (doppelte) Hyperbel oder zwei sich schneidende Geraden.
- *i.* Wenn $L(\xi, \eta) = \lambda$ eine Parabel darstellt, dann gilt $b^2 = ac$ und³

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \notin \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.27)$$

ii. Wenn $b^2 = ac$ und (6.27) gilt, beschreibt $L(\xi, \eta) = \lambda$ eine Parabel.

Für konstante Koeffizienten kann man (6.25) auch schreiben als

$$\left(\nabla \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \nabla + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \cdot \nabla + f \right) u = \varphi.$$

Lemma 6.11 Seien μ_1, μ_2 die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

- $\mu_1\mu_2 > 0 \Leftrightarrow$ (6.25) ist elliptisch.
- $\mu_1\mu_2 < 0 \Leftrightarrow$ (6.25) ist hyperbolisch.
- $\mu_1\mu_2 = 0$ und (6.27) gilt \Leftrightarrow (6.25) ist parabolisch.

³ $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \{\sum_{k=1}^n c_k \vec{v}_k; c_k \in \mathbb{R}\}$.

Beispiel 6.12 Die Tricomi-Gleichung $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ ist elliptisch für $x > 0$ und hyperbolisch für $x < 0$.

Beispiel 6.13 Die Differentialgleichung $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = \varphi$ gehört nicht zu einem dieser drei Typen, denn (6.27) ist nicht erfüllt. Mit der Koordinatentransformation $s = x + y$ und $t = x - y$ wird die Differentialgleichung $4u_{ss} + 2u_s = \varphi$ und die ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 6.4 Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen

1. $u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = f$,

2. $-u_{xx} + 5u_{xy} - 3u_{yy} = f$.

Aufgabe 6.5 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist diese Differentialgleichung parabolisch?

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + au_x + a^2u_y = f$$

6.3.2 In höheren Dimensionen

Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in n Dimensionen kann man wie folgt schreiben:

$$(\nabla \cdot M \nabla + \vec{v} \cdot \nabla + c) u = f, \quad (6.28)$$

mit M eine symmetrische und reelle $n \times n$ Matrix, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ und f eine vorgeschriebene Funktion.

Definition 6.14 Seien $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ die Eigenwerte von M . Man nennt die partielle Differentialgleichung in (6.28)

- elliptisch, wenn die Eigenwerte entweder alle positiv oder alle negativ sind;
- hyperbolisch, wenn $n - 1$ Eigenwerte entweder alle positiv oder alle negativ sind und der letzte Eigenwert ein entgegengesetztes Vorzeichen hat;
- parabolisch, wenn $n - 1$ Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben, der letzte Eigenwert gleich 0 ist und es außerdem gilt, dass $\vec{v} \notin \text{Spaltenraum}(M)$.

Bemerkung 6.14.1 Man erinnere sich aus der Vorlesung Lineare Algebra, dass eine symmetrische und reelle $n \times n$ Matrix M eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Man sollte sich auch erinnern, dass für eine $n \times n$ Matrix M die Determinante dem Produkt seiner Eigenwerte $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ (mit algebraischer Multiplizität) gleich:

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Es gilt übrigens auch, dass $\sum_{i=1}^n M_{ii} =: \text{spur}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Bemerkung 6.14.2 Lemma 6.11 zeigt, dass diese Klassifizierung auch gilt für Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen.

Bemerkung 6.14.3 Diese Aufteilung umfasst nicht alle Möglichkeiten. Die wichtigsten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus physikalischen Modellen sind aber erfasst.

Theorem 6.15 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Unter der Koordinatentransformation $x = Ay$ ändert sich der Typ der partiellen Differentialgleichung in (6.28) aus Definition 6.14 nicht.

Beweis. Setze $U(y) = u(Ay)$. Weil

$$\frac{\partial}{\partial y_i} U(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} (u(Ay)) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (Ay)$$

gilt, findet man $\nabla_y U(y) = A (\nabla_x u)(Ay)$ und $A^{-1} \nabla_y U(y) = (\nabla_x u)(Ay)$. Setzen wir $B = A^{-1}$, so ändert sich (6.28) mit $F(y) = f(Ay)$ in

$$(B \nabla_y \cdot M B \nabla_y + \vec{v} \cdot B \nabla_y + c) U = F,$$

und dies gleicht

$$(\nabla_y \cdot B^T M B \nabla_y + \vec{v} \cdot B \nabla_y + c) U = F.$$

Hier ist B^T der Transponierte von B . Weil M symmetrisch ist, ist auch $B^T M B$ symmetrisch:

$$(B^T M B)^T = B^T M^T (B^T)^T = B^T M B.$$

Man soll zeigen, dass die Zahl der positiven, beziehungsweise negativen und Null-Eigenwerte von M und $B^T M B$ identisch sind. Dies wäre einfach, wenn B orthogonal wäre, aber das dürfen wir nicht voraussetzen. Für eine allgemeine invertierbare Matrix $B \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ braucht man mehrere Schritte, die u.a. Ergebnisse aus der Matrixrechnung verwenden:

- (BB^T) ist eine symmetrische positiv definite Matrix.

- Es gibt eine orthogonale Matrix $S \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$, also $S^T = S^{-1}$, und eine Diagonalmatrix $D \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $D_{ii} > 0$ derart, dass $(BB^T) = SDS^T$.
- Für $\theta \in \mathbb{R}$ und $D_{ii} > 0$ ist die reelle Zahl $(D_{ii})^\theta$ wohldefiniert. Dann ist auch die Diagonalmatrix mit $(D^\theta)_{ii} = (D_{ii})^\theta$ und die Matrix $(BB^T)^\theta := SD^\theta S^T$ wohldefiniert. Hier setzen wir $D^0 = I$.
- $B^T M B$ und $(BB^T)^{1/2} M (BB^T)^{1/2}$ haben die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe 6.6 Finden Sie eine Matrix A derart, dass $A\varphi$ ein Eigenvektor von $(BB^T)^{1/2} M (BB^T)^{1/2}$ ist, wenn φ ein Eigenvektor von $B^T M B$ ist und derart, dass die zugehörigen Eigenwerte gleich sind.

- Die Dimension von

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^n; (BB^T)^\theta M (BB^T)^\theta v = 0 \right\}$$

ist konstant bezüglich θ .

- Die Nullstellen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}^n$ vom Polynom

$$p(\lambda; \vec{a}) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

kann man lokal so anordnen, dass sie stetig abhängig sind von $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$. Diese Stetigkeit ist bewiesen von Ostrowski in einer Arbeit aus 1939. Um dies genau zu formulieren ist jedoch weniger die Stetigkeit ein Problem, sondern

welchen Eigenwert man zum Beispiel λ_1 nennt, weil man diese Eigenwerte in \mathbb{C} nicht global durch eine vernünftige Ordnung festlegen kann. Siehe Abbildung 6.9.

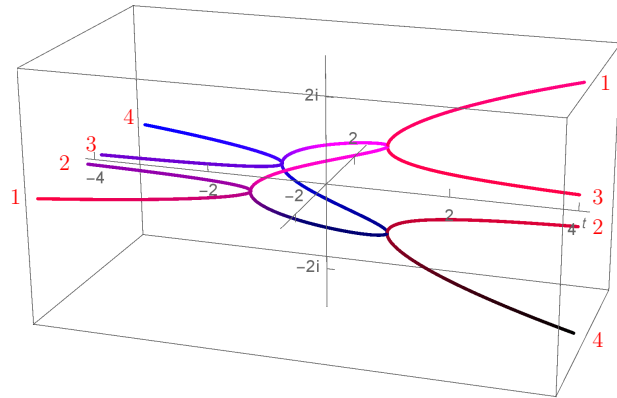


Abbildung 6.9: Sei $p_t(\lambda) := \lambda^4 + 2t\lambda^2 + 1 = 0$. Die vier Nullstellen $t \mapsto \lambda(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von $p_t(\lambda) = 0$ als Funktion von t sind hier skizziert. Ordnet man die Nullstellen links von vorne nach hinten, kann man diese Ordnung nicht stetig überführen in eine Ordnung rechts von oben nach unten oder umgekehrt.

- Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) := \det \left((BB^T)^\theta M (BB^T)^\theta - \lambda I \right)$$

hat für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gleich viel positive, beziehungsweise negative Nullstellen.

Kombiniert man diese Ergebnisse, dann folgt, dass die Zahl der positiven, beziehungsweise negativen und Null-Eigenwerte

von M und $B^T M B$ identisch sind. Die zusätzliche Bedingung für die Parabolizität lässt sich direkt kontrollieren. ■

Aufgabe 6.7 Berechnen Sie den Typ der Differentialgleichung in Abhängigkeit von a :

$$u_{xx} + 2au_{x,y} + u_{yy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z = f.$$

6.3.3 Bei variablen Koeffizienten

Wenn die Differentialgleichung Koeffizienten hat, die nicht konstant sind, kann die Klassifizierung ortsabhängig sein. Dann wird klassifiziert, indem man den Parameter einfriert. Das heißt, man nennt eine semilineare Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u(x) = f(x, u) \quad (6.29)$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) an der Stelle x_0 , wenn

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x_0) \partial_{x_j}$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) ist. Bei einer quasilinearen Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad (6.30)$$

wird dieses Einfrieren sogar von der Lösung selber abhängen. Man nennt (6.30) elliptisch (beziehungsweise hyperbolisch) an der Stelle x_0 , wenn gilt:

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0)) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$$

ist elliptisch.

Beispiel 6.16 Eine einfache Differentialgleichung für eine stationäre Potentialströmung von einem Gas in zwei Dimensionen ist

$$(c^2 - u_x^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2) u_{yy} = 0. \quad (6.31)$$

Hier ist u das Potential und ∇u die Geschwindigkeit. Weil

$$\det \begin{pmatrix} c^2 - u_x^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & c^2 - u_y^2 \end{pmatrix} = (c^2 - u_x^2)(c^2 - u_y^2) - (u_x u_y)^2 = c^2 (c^2 - |\nabla u|^2)$$

gilt, folgt, dass (6.31) elliptisch ist für $|\nabla u|^2 < c^2$ und hyperbolisch ist für $|\nabla u|^2 > c^2$. Bei einer solchen Potentialströmung ist c die Schallgeschwindigkeit in dem Gas. Diese Gleichung trifft auch zu, wenn das Gas zum Beispiel Luft ist und ein Flugzeug sich durch dieses Gas bewegt. Wenn sich das Flugzeug schneller als die Schallgeschwindigkeit bewegt, gibt es Stellen, an denen $|\nabla u| > c$ gilt. Das bedeutet, dass man dann für die Gleichung (6.31) sowohl „elliptische“ Gebiete als auch „hyperbolische“ Gebiete hat. Die Modellierung für Überschall- und für Unterschallflug sind dann auch wesentlich verschieden.

Aufgabe 6.8 Die Monge-Ampère Gleichung ist definiert für Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$\det \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = f.$$

Zeigen Sie, dass wenn $f > 0$ gilt und $u \in C^\infty(\Omega)$, dann ist diese Gleichung elliptisch. Weil diese Gleichung nicht linear ist, betrachtet man die Gleichung für

$$\begin{aligned} v(x, y) := & u(x, y) - u(x_0, y_0) - (x - x_0) u_x(x_0, y_0) \\ & - (y - y_0) u_y(x_0, y_0) - \frac{1}{2} (x - x_0)^2 u_{xx}(x_0, y_0) \\ & - (x - x_0)(y - y_0) u_{xy}(x_0, y_0) - \frac{1}{2} (y - y_0)^2 u_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

mit $(x_0, y_0) \in \Omega$, wenn $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ klein ist, und betrachtet deren Klassifizierung.