

## Die 1d Wellengleichung

Eine typische hyperbolische partielle Differentialgleichung ist die Wellengleichung:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0. \quad (7.1)$$

Die Variable  $t$  repräsentiert meistens die Zeit; der Differentialoperator  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  ist die Summe der zweiten Ableitungen bezüglich der Raumvariablen. In Raumdimension 1 beschreibt diese Gleichung zum Beispiel die Schwingungen einer Saite, in Dimension 2 die Wellen in einem Teich und in Dimension 3 beschreibt sie, wie die Stimme eines Sängers sein Publikum erreicht.

### 7.1 Die Wellengleichung in Raumdimension 1

Die Wellengleichung in einer Dimension haben wir schon betrachtet in Paragraph 6.2.1. Die folgende partielle Differentialgleichung ist gemeint:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t).$$

Diese Differentialgleichung ist hyperbolisch. Man kann durch Skalierung  $c = 1$  erhalten, so wie es in Paragraph 6.2.1 gemacht wird. Weil  $c$  genau die Geschwindigkeit ist, mit der die Wellen sich seitwärts bewegen, lässt man der Anschaulichkeit halber  $c$  oft auch stehen.

Die Funktion  $f$  ist gegeben und man versucht, bei geschickt gewählten Anfangs- und Randwerten, die Existenz einer eindeutigen Lösung zu zeigen. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (7.2)$$

ist ein solches Problem.

#### Proposition 7.1 (Die Formel von d'Alembert)

Sei  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ . Dann hat (7.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - ct) + \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (7.3)$$

**Bemerkung 7.1.1** Wenn  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C(\mathbb{R})$ , dann liefert (7.3) immer noch eine schwache Lösung  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

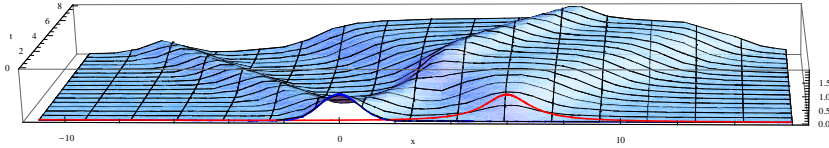


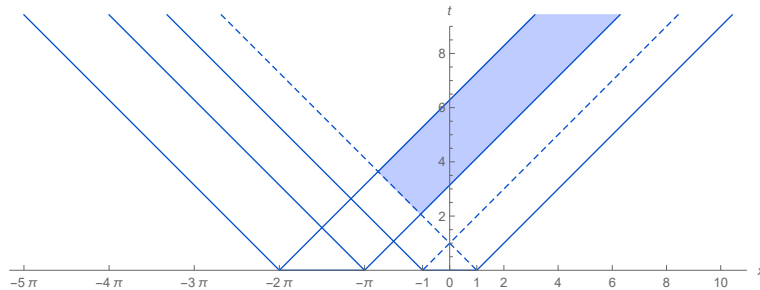
Abbildung 7.1: Skizze der Lösung nach d'Alembert von (7.2) mit  $c = 1$  und  $u_0(x) = e^{-x^2}$  (in blau) und  $v_0(x) = \frac{1}{1+(x-6)^2}$  (in rot).

**Aufgabe 7.1** Sei  $c = 1$  und  $u_0, v_0$  definiert durch

$$u_0(x) = \begin{cases} (\sin(x))^2 & \text{für } x \in [-2\pi, -\pi], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$v_0(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie eine Lösung  $u$  von (7.2) auf dem in Blau angegebenen Teilgebiet.



2. Geben Sie auch den Träger von  $u$  in  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  an.

**Aufgabe 7.2** Obwohl in der letzten Aufgabe  $u_0 \in C^{1,1}(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$  gilt, kann man die Formel von d'Alembert anwenden. Wie kann man eine Lösung passend definieren?

**Beweis.** Wenn  $f, u_0$  und  $v_0$  diesen obengenannten Funktionenräumen angehören, ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar. Die erste Anfangsbedingung folgt direkt:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}u_0(x-0) + \frac{1}{2}u_0(x+0) + \frac{1}{2c} \int_x^x v_0(y) dy = u_0(x).$$

Man findet

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}cu_0'(x-ct) + \frac{1}{2}cu_0'(x+ct) + \frac{1}{2}v_0(x+ct) + \frac{1}{2}v_0(x-ct),$$

und es folgt

$$u_t(x, 0) = v_0(x).$$

Nochmals nach  $t$  ableiten ergibt

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{2}c^2u_0''(x-ct) + \frac{1}{2}c^2u_0''(x+ct) + \frac{1}{2}cv_0'(x+ct) - \frac{1}{2}cv_0'(x-ct).$$

Die Ableitungen nach  $x$  sind

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2}u_0'(x-ct) + \frac{1}{2}u_0'(x+ct) + \frac{1}{2c}v_0(x+ct) - \frac{1}{2c}v_0(x-ct),$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2}u_0''(x-ct) + \frac{1}{2}u_0''(x+ct) + \frac{1}{2c}v_0'(x+ct) - \frac{1}{2c}v_0'(x-ct).$$

Die Differentialgleichung ist erfüllt und  $u$  in (7.3) ist eine Lösung.

Dass diese Lösung die einzige ist, findet man durch Verfolgung der charakteristischen Kurven anfangend auf  $t = 0$ .

Wenn es nämlich zwei Lösungen gäbe, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann erfüllt  $u = u_1 - u_2$  das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ (\partial_t + c\partial_x)u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Entlang der charakteristischen Kurven für  $\partial_t - c\partial_x$ , also entlang  $x = x_0 - ct$ , folgt dass  $(\partial_t + c\partial_x)u$  konstant ist:

$$((\partial_t + c\partial_x)u)(x_0 - ct, t) = ((\partial_t + c\partial_x)u)(x_0, 0) = 0.$$

Also gilt  $(\partial_t + c\partial_x)u(x, t) = 0$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Anschließend finden wir entlang  $x = x_0 + ct$ , dass

$$u(x_0 + ct, t) = u(x_0, 0) = 0.$$

Also gilt  $u(x, t) = 0$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  und  $u_1 \equiv u_2$ . ■

Der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung von (7.2) gilt auch für  $f \neq 0$ .

**Proposition 7.2 (Prinzip von Duhamel)** Sei  $u_0 = v_0 = 0$  und  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Dann hat (7.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds \quad (7.5)$$

wobei  $U(\cdot, \cdot; s)$  für  $s > 0$  die Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2 U_{xx}(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s. \end{cases} \quad (7.6)$$



Abbildung 7.2: Links: Jean Le Rond d'Alembert, 1717 - 1783. Rechts: Jean Marie Constant Duhamel, 1797 - 1872.

**Bemerkung 7.2.1** Die Funktionen  $(x, t) \mapsto U(x, t; s)$  sind wohldefiniert für  $t \geq s$ . Dies bedeutet auch, dass  $u$  in (7.5) wohldefiniert ist.

**Bemerkung 7.2.2** Die Differentialgleichung ist linear. Das bedeutet, dass die Summe von (7.3) und (7.5) eine Lösung liefert für (7.2) mit  $u_0, v_0$  und  $f$  ungleich 0.

**Beweis.** Aus Proposition 7.1 folgt

$$U(x, t; s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy.$$

Wenn  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , dann ist auch  $(x, t, s) \mapsto U(x, t; s)$

zweimal stetig differenzierbar. Man findet<sup>1</sup>

$$u_t(x, t) = U(x, t; t) + \int_0^t U_t(x, t; s) ds = \int_0^t U_t(x, t; s) ds$$

und

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= U_t(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t U_{tt}(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t c^2 U_{xx}(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + c^2 u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Weil

$$u(x, 0) = \int_0^0 U(x, 0; s) ds = 0$$

und

$$u_t(x, 0) = \int_0^0 U_t(x, 0; s) ds = 0,$$

sind auch die Anfangsbedingungen erfüllt. ■

Noch eine Bemerkung zu (7.3) und (7.5) ist zu machen: In (7.3) steht, wie sich der Einfluss der Anfangswerte  $u_0$  und  $v_0$

<sup>1</sup>Für  $g(t) = \int_0^t f(t, s) ds$  mit stetig differenzierbarem  $f$  gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^{t+h} f(t+h, s) ds - \int_0^t f(t, s) ds \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t+h, s) ds + \int_0^t \frac{f(t+h, s) - f(t, s)}{h} ds \right) = \\ &= f(t, t) + \int_0^t f_t(t, s) ds. \end{aligned}$$

auswirkt. In (7.5) sieht man, wo  $f$  an der Stelle  $(x, t)$  seinen Einfluss hat. Umgekehrt kann man sehen, wie der Wert von  $u(x, t)$  abhängt von  $u_0, v_0$  und  $f$ . Man nennt diese Teilgebiete Einflussbereich und Abhängigkeitsbereich. Für  $u_0$  sind es Kegelflächen. Für  $v_0$  und  $f$  sind es *Einflusskegel*<sup>2</sup> und *Abhängigkeitskegel*<sup>3</sup>. Siehe Abbildung 7.3.

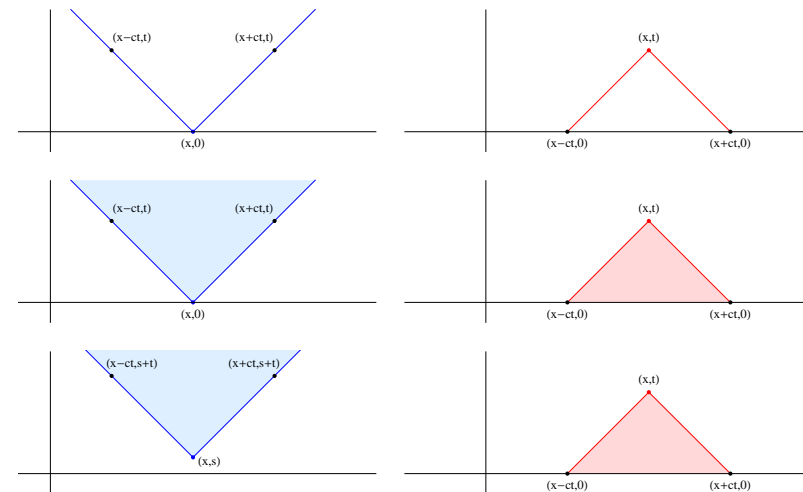


Abbildung 7.3: Oben: Das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet zu  $u_0$ . Mitte: Der Einflusskegel und der Abhängigkeitskegel zu  $v_0$ . Unten: Der Einflusskegel und der Abhängigkeitskegel zu  $f$ .

**Aufgabe 7.3** Sei  $f$  definiert durch

$$f(x, t) = \begin{cases} (1-x^2)^2(2-t)^2 & \text{für } |x| \leq 1 \text{ und } t \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Cone of influence

<sup>3</sup>Cone of dependance

Wir betrachten

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass  $u(x, t) = 0$  gilt für  $t \leq |x| - 1$ .
2. Zeigen Sie, dass  $u(x, t)$  konstant ist für  $t \geq |x| + 3$ .
3. Wir definieren  $M(t) := \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$ . Zeigen Sie, dass

$$M''(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dx \quad \text{und} \\ M'(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x, s) dx ds.$$

4. Zeigen Sie, dass  $M'(t)$  konstant ist für  $t \geq 2$ .
5. Berechnen Sie  $M(t)$  für  $t \geq 2$ .
6. Berechnen Sie mit diesem  $M(t)$  den konstanten Wert von  $u(x, t)$  für  $t \geq |x| + 3$ .

## 7.2 Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall

Die Formeln von D'Alembert und Duhamel sind für  $x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$  gemacht. Man kann sie jedoch manchmal verwenden, wenn  $x$  in einem Intervall  $I$  liegt. Wie man in Paragraph 6.2.1

schon gesehen hat, braucht man für  $(x, t) \in \partial I \times \mathbb{R}^+$  dann eine Randbedingung. Wenn diese Randbedingung sehr einfach ist, wie zum Beispiel  $u(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \partial I \times \mathbb{R}^+$  dann kann man für ein solches beschränktes Gebiet eine Lösung finden, wenn man die Funktionen  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$  geschickt fortsetzt. Wir betrachten dies in den nächsten Beispielen.

**Beispiel 7.3** Für  $I = \mathbb{R}^+$  und  $u(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \partial I \times \mathbb{R}^+$  wird das Anfangs-Randwertproblem wie folgt:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0, t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Man definiere

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= \begin{cases} f(x, t) & \text{für } x \geq 0, \\ -f(-x, t) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -u_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{v}_0(x) &= \begin{cases} v_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -v_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

und betrachte (7.2) mit diesen erweiterten rechten Seiten. Wenn  $f(0, t)$ ,  $u_0(0)$  und  $v_0(0)$  nicht identisch 0 sind, sind diese erweiterten Funktionen nicht länger stetig. Und sogar wenn diese Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist, reicht es noch nicht für die Differenzierbarkeit. Sei  $\bar{u}(x, t)$  nun definiert durch (7.3) und (7.5). Dann folgt aus der antisymmetrischen Fortsetzung von  $f$ ,  $u_0$  und  $v_0$ , dass auch  $x \mapsto \bar{u}(x, t)$  antisymmetrisch ist, das heißt

$$\bar{u}(x, t) = -\bar{u}(-x, t).$$

Ist also die Kompatibilitätsbedingung erfüllt, findet man durch

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t)|_{x \geq 0}$$

eine distributionelle Lösung  $u \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ .

**Beispiel 7.4** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_x(0, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (7.8)$$

findet man eine Lösung durch symmetrische Fortsetzung:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= \begin{cases} f(x, t) & \text{für } x \geq 0, \\ f(-x, t) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ u_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{v}_0(x) &= \begin{cases} v_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ v_0(-x) & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Auch hier gibt es Kompatibilitätsbedingungen, wenn die Lösung  $\bar{u}(x, t)$  klassisch sein sollte.

**Beispiel 7.5** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in (0, \ell) \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (7.9)$$

findet man eine Lösung durch periodische Fortsetzung. Man definiert

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \in [0, \ell), \\ -u_0(2\ell - x) & \text{für } x \in [\ell, 2\ell), \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \tilde{u}_0(x - \lfloor \frac{x}{2\ell} \rfloor 2\ell). \end{aligned}$$

Hier ist  $[s] = \max\{k \in \mathbb{N}; k \leq s\}$ . Auf ähnliche Weise werden  $f(\cdot, t)$  und  $v_0$  fortgesetzt. Eine solche Fortsetzung findet man in Abbildung 7.4.



Abbildung 7.4: Periodische Fortsetzung einer auf  $[0, L]$  definierten Funktion, die außerdem antisymmetrisch ist bezüglich 0 und  $L$ .

Für das Problem (7.9) kann man auch eine Lösung finden mit Hilfe von Fouriertheorie. Für (7.9) wäre das eine Lösung der Form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \phi_k(x) \sqrt{2/\ell} \sin\left(k \frac{\pi}{\ell} x\right)$$

mit

$$\phi_k(x) = \sqrt{2/\ell} \sin\left(k \frac{\pi}{\ell} x\right) \quad (7.10)$$

und  $c_k(\cdot)$  eine geschickt gewählte Lösung von

$$c_k''(t) + \left(k \frac{\pi}{\ell}\right)^2 c_k(t) = 0.$$

Die Funktionen  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ , definiert in (7.10), nennt man ein vollständiges Orthonormalsystem für  $L^2(0, \ell)$ , das heißt, für jede Funktion  $u_0 \in L^2(0, \ell)$  gibt es eine Folge  $\gamma_k \in \ell^2$  derart, dass

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \phi_k(x). \quad (7.11)$$

Genauer gesagt, bedeutet (7.11), dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u_0(x) - \sum_{k=1}^m \gamma_k \phi_k(x) \right\|_{L^2(0, \ell)} = 0.$$

Das hier gewählte Orthonormalsystem sind die Eigenfunktionen von

$$\begin{cases} \phi_{xx}(x) = \lambda \phi(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ \phi(0) = \phi(\ell) = 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 7.4** *Geben Sie eine Lösung von*

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in (0, \pi) \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(x) & \text{für } x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \sin(2x) & \text{für } x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

*Ist sie die einzige Lösung?*

