Partielle Differentialgleichungen — Woche 8

Intermezzo zu Distributionen

Die Physik hat der Mathematik die *Dirac-δ-Funktion*[1] gebracht. Diese δ-Funktion soll folgende Eigenschaften haben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \text{ für jedes } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Wenn δ eine integrierbare Funktion wäre, folgt aus dem Satz von Lusin, dass δ stetig ist auf jedem beschränkten Gebiet mit Ausnahme einer beliebig kleinen Menge. Wenn δ stetig ist in $x \neq 0$, folgt mit dem Hauptlemma der Variationsrechnung (Lemma 3.17), dass $\delta(x) = 0$. Es gilt also $\delta = 0$ fast überall. Dann folgt aber, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$, und das ist ein Widerspruch.

Das bedeutet nicht, dass es diese Dirac-δ-Funktion nicht gibt, sondern, dass wir etwas mehr Sorgfalt walten lassen müssen, wenn wir dieses δ definieren. Dazu brauchen wir Objekte, die den Begriff der Funktion erweitern. Diese Erweiterung hat den Namen Distribution bekommen.

[1] Paul Adrien Maurice Dirac, 1902 Bristol (GB) – 1984 Tallahassee (USA), Nobel Preis in Physik 1933

8.1 Testfunktionen

Die Dirac-δ-Funktion ist etwas, das sich nur definieren lässt durch seine Wirkung auf Testfunktionen φ. Die zwei wichtigsten Sorten von Testfunktionen werden wir vorstellen:

Definition 8.1 *Man nennt*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\, \exists R > 0 \text{ mit } u(x) = 0 \text{ für } |x| > R\}$$

den Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

Bemerkung 8.1.1 *Manchmal schreibt man auch $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ statt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Beispiel 8.2 *Die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases} \tag{8.1}$$

ist eine Funktion in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Notation 8.3 *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ setzt man*

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$
$$D^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}.$$

Man nennt α und β Multiindizes.

Definition 8.4 *Man nennt*

$$C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \lim_{|x|\to\infty} x^\alpha D^\beta u(x) = 0 \right\}$$

den Vektorraum der schnell fallenden*, beliebig oft differenzierbaren Funktionen.*

Aufgabe 8.1 *Die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird definiert durch $\varphi(x) = \exp\left(-|x|^2\right)$. Zeigen Sie, dass $\varphi \in C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n)$.*

8.2 Konvergenz für Testfunktionen

Sowohl für $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ als auch für $C^\infty_{\text{s.f.}}(\mathbb{R}^n)$ wollen wir Folgenkonvergenz festlegen. Wenn eine passende Norm zur Verfügung steht, wäre das einfach. Man könnte zwar zum Beispiel die $\|\cdot\|_\infty$-Norm verwenden, doch die gibt nicht genügend Struktur. Wir möchten, dass der Limes einer Folge von Testfunktionen auch wieder eine Testfunktion aus der gleichen Menge ist. Das heißt zum Beispiel bei $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dass die Träger beschränkt bleiben und im gleichen Kompaktum liegen. Um beim Limes wieder eine $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktion zu bekommen, brauchen wir Konvergenz in jeder $C^k(\mathbb{R}^n)$-Norm. Dies führt zu der folgenden Definition der Konvergenz bei Testfunktionen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

Definition 8.5 *Sei $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann sagen wir*

$$\varphi_\ell \to \varphi \text{ in } \mathscr{D},$$

wenn:

1. *es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt derart, dass für die Träger* supp (φ_ℓ) *gilt*
$$\operatorname{supp}(\varphi_\ell) \subset K \text{ für alle } \ell \in \mathbb{N},$$
2. *und für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ gilt $\left\|D^\beta\varphi_\ell - D^\beta\varphi\right\|_\infty \to 0$, wenn $\ell \to \infty$.*

Bemerkung 8.5.1 *Schwartz nannte den Vektorraum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ versehen mit dieser Konvergenz $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ oder nur $\mathscr{D}$. Der Buchstabe D wurde von Schwartz verwendet wegen Differenzieren.*

Auf ähnliche Art geht man vor bei der zweiten Klasse von Testfunktionen. Um beim Limes in $C^\infty_{\text{s.f.}}(\mathbb{R}^n)$ wieder eine $C^\infty_{\text{s.f.}}(\mathbb{R}^n)$-Funktion zu bekommen, definiert man für $u \in C^\infty_{\text{s.f.}}(\mathbb{R}^n)$ die folgenden Normen:

$$\|u\|^*_{m,k} := \sum_{\substack{|a|\le k\\ |\beta|\le m}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta u(x)\right|. \tag{8.2}$$

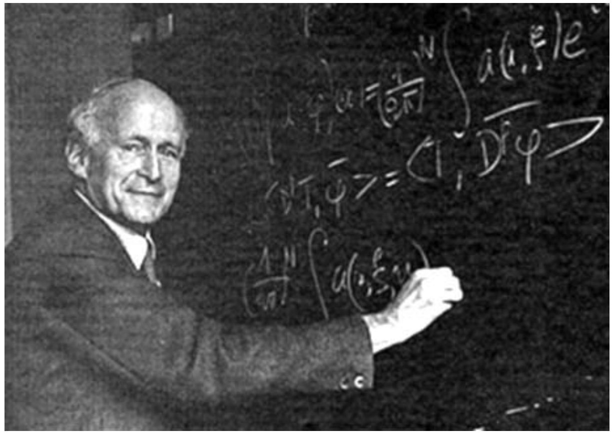


Abbildung 8.1: Laurent Schwartz, 1915 - 2002, Französischer Mathematiker.

Definition 8.6 *Sei $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n)$ und sei $\varphi \in C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n)$. Dann sagen wir*

$$\varphi_\ell \to \varphi \text{ in } \mathscr{S},$$

wenn für alle $m, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|\varphi_\ell - \varphi\|^*_{m,k} \to 0 \text{ wenn } \ell \to \infty.$$

Bemerkung 8.6.1 *Um Schwartz zu ehren nannte man den Vektorraum $C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n)$, versehen mit dieser Konvergenz, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ oder nur $\mathscr{S}$.*

Bemerkung 8.6.2 *Um die Konvergenz in $\mathscr{S}$ zu definieren, verwendet man (abzählbar) unendlich viele Normen. Wenn man endlich viele Normen hätte, dann würde man $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ als einen normierten Vektorraum darstellen können. Dies gelingt hier jedoch nicht.*

Man sieht direkt, dass $C^\infty_0(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty_{\text{s.f.}}(\mathbb{R}^n)$ und dass $C^\infty_{\text{s.f.}}(\mathbb{R}^n)$ echt größer als $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ ist.

Wie verhalten sich die beiden Konvergenzdefinitionen?

Lemma 8.7 *Sei $\{\varphi_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Wenn $\varphi_\ell \to \varphi$ in $\mathscr{D}$, dann gilt auch $\varphi_\ell \to \varphi$ in $\mathscr{S}$.*
2. *Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Beweis. *1.* Wir dürfen annehmen, dass $\operatorname{supp}(\varphi_\ell) \subset B_R(0)$ mit $R \geq 1$. Dann gilt

$$\|\varphi_\ell\|^*_{m,k} \leq R^k \|\varphi_\ell\|_{C^m(K)} \to 0 \text{ für } \ell \to \infty.$$

2. Für die Umkehrung nehmen wir ein nichttriviales $\tilde{\varphi} \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ und betrachten

$$\varphi_\ell(x) = \ell^{-1}\tilde{\varphi}\left(\ell^{-1}x\right).$$

Dann gilt $\varphi_\ell \to 0$ in $\mathscr{S}$ aber die Folge konvergiert nicht in $\mathscr{D}$, denn die Träger $\operatorname{supp}(\varphi_\ell)$ liegen nicht innerhalb eines gemeinsamen Kompaktums. ■

Aufgabe 8.2 *Wir definieren $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ durch*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-n^2x^2}{n^2-x^2}\right) & \text{für } |x| < n, \\ 0 & \text{für } |x| \geq n. \end{cases}$$

1. *Zeigen Sie $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.*
2. *Berechnen Sie $\varphi_\infty(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.*
3. *Zeigen Sie $\varphi_n \not\to \varphi_\infty$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.*
4. *Zeigen Sie $\varphi_n \to \varphi_\infty$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

8.3 Distributionen

Für einen normierten Raum X definiert man den Dualraum X' als den Raum der stetigen linearen Abbildungen. Um den Dualraum zu definieren, muss der Raum nicht unbedingt eine Norm haben, sondern es reicht, die Konvergenz definiert zu haben.

Definition 8.8 (Schwartz-Distributionen) *Eine Schwartz-Distribution ist eine stetige lineare Abbildung von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathbb{R}$. Für die Menge dieser Distributionen schreibt man $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Bemerkung 8.8.1 *Also gilt $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, wenn*

1. *F ist linear: für alle $c_i \in \mathbb{R}$ und $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*
$$F(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1F(\varphi_1) + c_2F(\varphi_2);$$
2. *F ist stetig:*
$$\varphi_n \to \varphi \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \implies |F(\varphi_n) - F(\varphi)| \to 0.$$

Bemerkung 8.8.2 *Wie immer bei linearen Abbildungen impliziert die Stetigkeit in 0 die Stetigkeit auf dem ganzen Raum, denn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}$ impliziert $\varphi_n - \varphi \to 0$ in $\mathscr{D}$ und die Linearität liefert $|F(\varphi_n) - F(\varphi)| = |F(\varphi_n - \varphi)|$.*

Bemerkung 8.8.3 *Wenn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}$, dann haben diese φ_n nach Definition 8.5 den Träger im gleichen Kompaktum liegen, aber auch folgt, dass $\|\varphi_n - \varphi\|_{C^k} \to 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass $F \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, reicht es also, dass F linear ist und es eine solche C^k-Norm gibt derart, dass*
$$|F(\varphi)| \le C_F \|\varphi\|_{C^k}$$
für ein $C_F \in \mathbb{R}^+$ unabhängig von φ.

Definition 8.9 (Temperierte Distributionen) *Eine temperierte Distribution ist eine stetige lineare Abbildung von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathbb{R}$. Für die Menge dieser Distributionen schreibt man $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Bemerkung 8.9.1 *Linearität und Stetigkeit sind ähnlich wie in Bemerkung 8.8.1.*

Weil $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt und wegen Lemma 8.7, kann man sagen
$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$
Stetigkeit in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist also etwas, das für eine größere Menge Funktionen gelten soll als die Stetigkeit in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Dies bedeutet, dass
$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Jede lokal Lebesgue-integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ liefert durch
$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx. \tag{8.3}$$
eine Abbildung $F_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Eine solche Distribution nennt man regulär. Die Linearität von F_f folgt sofort. Für Stetigkeit betrachte man für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in K die folgende

Abschätzung:

$$\begin{aligned}|F_f(\varphi)| &\leq \int_K |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \int_K |f(x)|\,dx = \|f\|_{L^1(K)}\,\|\varphi\|_{L^\infty(K)}\,.\end{aligned}$$

Wenn $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, findet man ein $K \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}\varphi_n$ und $\|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \to 0$. Es folgt, dass

$$|F_f(\varphi_n)| \leq \|f\|_{L^1(K)}\,\|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Wenn die Funktion f höchstens polynomiales Wachstum hat, dann definiert (8.3) auch ein $F_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Nimmt man jedoch eine Funktion wie $f(x) = e^{|x|^2}$, dann findet man, dass $F_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, jedoch auch, dass $F_f \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 8.10 *Wenn $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, dann ist F', definiert durch*

$$F'(\varphi) := -F(\varphi')\,,$$

auch in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Das ähnliche Ergebnis gilt für $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 8.10.1 *Ähnliches gilt in höheren Dimensionen mit partiellen Ableitungen.*

Beweis. Die Linearität von F' folgt aus der Linearität von F. Für die Stetigkeit von F' verwendet man die von F. Denn, wenn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt, dann gilt auch $\varphi_n' \to \varphi'$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Weil

$$F'(\varphi_n) = -F(\varphi_n') \to -F(\varphi') = F'(\varphi)$$

folgt das Ergebnis. ■

Beispiel 8.11 *Betrachtet man $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(x)$, dann ist die zugehörige Abbildung F auf $C_0[-1,1]$ definiert als*

$$F(\varphi) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\varphi(x)\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} \varphi(x)dx.$$

Es gilt für F' auf $C^1[-1,1] \cap C_0[-1,1]$, dass

$$\begin{aligned}F'(\varphi) = -F(\varphi') &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0} \varphi'(x)dx - \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} \varphi'(x)dx = \\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(0) - \tfrac{1}{2}\varphi(-1) - \tfrac{1}{2}\varphi(1) + \tfrac{1}{2}\varphi(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi)\,.\end{aligned}$$

Bemerkung 8.11.1 *Die Dirac-δ-Funktion liegt sowohl in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ als auch in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, denn für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$|\delta_0(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{0,0}^*\,.$$

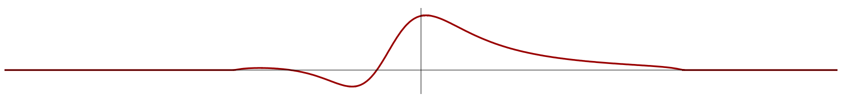


Abbildung 8.2: Darstellung einer Funktion aus $D(R)$. Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und hat einen kompakten Träger.

Reguläre Distributionen sind Distributionen aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, welche sich wie in (8.3) mit Hilfe einer Funktion definieren lassen.

Wir betrachten nochmals φ_ε aus (3.9):

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-\varepsilon^2}} & \text{für } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x| \geq \varepsilon, \end{cases} \tag{8.4}$$

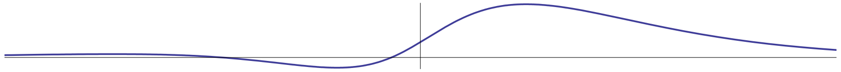


Abbildung 8.3: Darstellung einer Funktion aus $S(R)$. Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und schnell fallend.

und setzen

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx}. \tag{8.5}$$

Ein Bild zu diesen Funktionen findet man in Abbildung 3.3. Setze

$$\Psi_\varepsilon(u)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x)\, u(x)\, dx \text{ für } u \in C_B(\mathbb{R}^n). \tag{8.6}$$

Für $\varepsilon > 0$ ist die Abbildung $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \to C_B(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, und es gilt

$$u \in C_B(\mathbb{R}^n) \implies \Psi_\varepsilon(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_B(\mathbb{R}^n).$$

Definition 8.12 *Den Operator $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \to C_B(\mathbb{R}^n)$ aus (8.6) nennt man den Friedrichsschen[2] Glätter oder Mollifier.*

Lemma 8.13 *Sei $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$. Es gilt*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Psi_\varepsilon(u)(y) = u(y). \tag{8.7}$$

Für $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$ gilt sogar

$$|\Psi_\varepsilon(u)(y) - \delta_y u| \le \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)}\, \varepsilon. \tag{8.8}$$

[2]Kurt Otto Friedrichs, (1901 Kiel – 1982 New Rochelle, New York) war ein deutsch-amerikanischer Mathematiker

Bemerkung 8.13.1 *Man kann dieses Ergebnis wie folgt lesen: $\{\Psi_\varepsilon(\cdot)(y)\}_{\varepsilon>0}$ sind reguläre Distributionen, die die Dirac-δ-Funktion an der Stelle y approximieren, wenn $\varepsilon \downarrow 0$.*

Bemerkung 8.13.2 *Weil (8.7) gilt, sind $\Psi_\varepsilon(u)$ für $\varepsilon > 0$ unendlich oft differenzierbare Funktionen, die $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$ punktweise approximieren. Wenn $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$ ist diese Approximation wegen (8.8) sogar gleichmäßig.*

Beweis. Da $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)dx = 1$ gilt und u stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(u)(y) - u(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x)\,(u(x) - u(y))\, dx \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)|\, dx \\ &= \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)| \to 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

Wenn $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$, hat man

$$|u(z) - u(y)| \le \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)} |z - y|,$$

und es folgt die letzte Ungleichung. ■

8.4 Distributionen und Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele vorgeführt.

Beispiel 8.14 *Man könnte versuchen Distributionen als Anfangswerte zuzulassen. Wir betrachten*

$$\left\{\begin{array}{cl} u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t)=f(x,t) & \text{für } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R},\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{für } x\in\mathbb{R},\\ u_t(x,0)=v_0(x) & \text{für } x\in\mathbb{R},\end{array}\right. \tag{8.9}$$

und nehmen hier statt der Funktion u_0 die δ-Distribution δ_y und setzen $v_0=f=0$. Man bekäme formell eine distributionelle Lösung $u(\cdot,t)=\frac12\delta_{y-ct}+\frac12\delta_{y+ct}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ (auch in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$). Hätte man $u_0=\sum_i\delta_{y_i}$, würde man durch die Linearität $u(\cdot,t)=\frac12\sum_i(\delta_{y_i-ct}+\delta_{y_i+ct})$ als Lösung haben. Für eine allgemeine Anfangsbedingung $u_0(\cdot)$ kann man formell schreiben (wir tun mal so, als ob δ_y eine Funktion wäre):

$$u_0(x)=\int_{y\in\mathbb{R}}\delta_y(x)\,u_0(y)\,dy.$$

Die Lösung wäre

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\int_{y\in\mathbb{R}}\left(\tfrac12\delta_{y-ct}(x)+\tfrac12\delta_{y+ct}(x)\right)u_0(y)\,dy\\ &=\int_{y\in\mathbb{R}}\left(\tfrac12\delta_y(x+ct)+\tfrac12\delta_y(x-ct)\right)u_0(y)\,dy\\ &=\tfrac12u_0(x+ct)+\tfrac12u_0(x-ct).\end{aligned}\tag{8.10}$$

Wenn auch dies alles mathematisch erst noch mal zwielichtig ist, kann man leicht kontrollieren, dass das Endergebnis vernünftig ist. Für $u_0\in C^2(\mathbb{R})$ ist (8.10) tatsächlich die klassische Lösung, die wir schon vorher sahen.

Beispiel 8.15 *Man betrachte $f(x)=\frac12|x|$. Dann ist f' und f'' nicht überall definiert. Definiert man $F_f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ oder $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ durch*

$$F_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

dann folgt

$$\begin{aligned} F_f'(\varphi)&=\int_{\mathbb{R}}\tfrac12\mathrm{sign}(x)\,\varphi(x)\,dx,\\ F_f''(\varphi)&=\varphi(0).\end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$f'(x)=\tfrac12\mathrm{sign}(x)\ \ \text{für } x\neq0.$$

Man zeigt diese Behauptungen durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} F_f'(\varphi)=-F_f(\varphi')&=-\int_{\mathbb{R}}\tfrac12|x|\,\varphi'(x)\,dx\\ &=\int_{-\infty}^0\tfrac12x\varphi'(x)\,dx-\int_0^\infty\tfrac12x\varphi'(x)\,dx\\ &=\lim_{m\to\infty}\left(\left[\tfrac12x\varphi(x)\right]_{-m}^0-\int_{-m}^0\tfrac12\varphi(x)\,dx\right)\\ &\qquad-\lim_{m\to\infty}\left(\left[\tfrac12x\varphi(x)\right]_0^m-\int_0^m\tfrac12\varphi(x)\,dx\right)\\ &=-\int_{-\infty}^0\tfrac12\varphi(x)\,dx+\int_0^\infty\tfrac12\varphi(x)\,dx\\ &=\int_{\mathbb{R}}\tfrac12\mathrm{sign}(x)\,\varphi(x)\,dx,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_f''(\varphi) &= -F_f'(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}\mathrm{sign}(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\,dx \\ &= \lim_{m\to\infty} \left[\tfrac{1}{2}\varphi(x)\right]_{-m}^{0} - \lim_{m\to\infty} \left[\tfrac{1}{2}\varphi(x)\right]_{0}^{m} = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Im Sinne von Distributionen gilt also:

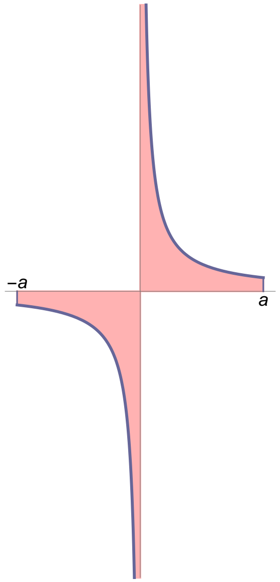
$$\left(\tfrac{1}{2}\left|\cdot\right|\right)' = \tfrac{1}{2}\mathrm{sign}(\cdot) \ \text{ und } \ \left(\tfrac{1}{2}\mathrm{sign}(\cdot)\right)' = \delta(\cdot).$$

Aufgabe 8.3 *Wir definieren F für geschickte Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \ln|x| \ \ \varphi(x)\,dx. \tag{8.11}$$

1. *Zeigen Sie, dass $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.*
2. *Zeigen Sie, dass $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*
3. *Sei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Welche der folgenden Behauptungen stimmt?*
   (a) $F'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx;$
   (b) $F'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx;$
   (c) $F'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.$

Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist in 0 nicht stetig fortsetzbar und bei 0 weder Riemann- noch Lebesgue-integrierbar. Schaut man sich auf $[-a, a]$ die positive Oberfläche unter der Funktion rechts und die negative Oberfläche links an, könnte man bemerken, dass man das Integral über $[-a, a]$ doch als 0 definieren könnte, weil $\infty - \infty$ etwas sein könnte.



So naiv geht es leider nicht. Für einige Funktionen f, die stetig sind auf $[-a, a] \setminus \{0\}$, kann man jedoch den Cauchyschen Hauptwert[3] definieren durch:

$$\mathrm{CH}\int_{-a}^{a} f(x)\ dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} f(x)\ dx + \int_{\varepsilon}^{a} f(x)\ dx\right).$$

Der Unterschied zu dem uneigentlichen Riemann-Integral ist, dass da die beiden Grenzwerte getrennt und unabhängig existieren müssen.

Die Distribution $F_{\mathrm{CH}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, definiert für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ durch

$$F_{\mathrm{CH}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{1}{x}\ \varphi(x)\,dx,$$

ist wohl-definiert.

[3] Meistens schreibt man *V.P.* (valeur principal) oder *p.v.* (principle value) statt CH.

Aufgabe 8.4 *1. Zeigen Sie $F_{\mathrm{CH}} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

2. Geben Sie für $F''(\varphi)$, mit F aus (8.11), eine Formel mit Dirac-delta und den Cauchyschen Hauptwert.

Beispiel 8.16 *Sei $f \in L^1_{lokal}(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 3$ definiert durch*

$$f(x) = |x|^{2-n}. \tag{8.12}$$

Dann ist

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \varphi(x)\, dx$$

wohldefiniert für $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ oder $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Es folgt

$$\begin{aligned}
(\Delta F_f)(\varphi) &= F_f(\Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x)\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x)\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\int_{|x|=\varepsilon} \left(|x|^{2-n} \nabla\varphi(x) - \left(\nabla |x|^{2-n}\right)\varphi(x)\right) \cdot \nu d\sigma_x \right. \\
&\qquad \left. + \int_{|x|>\varepsilon} \left(\Delta |x|^{2-n}\right) \varphi(x)\, dx \right) = (*)
\end{aligned}$$

und weil $\Delta |x|^{2-n} = 0$ für $x \neq 0$ folgt $(*) =$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\varepsilon^{2-n}\mathcal{O}\left(\varepsilon^{n-1}\right) - \int_{|x|=\varepsilon} (2-n)\,|x|^{-n}\, x\ \varphi(x) \cdot \frac{-x}{|x|} d\sigma_x \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} (2-n)\,|x|^{1-n}\ \varphi(x)\ d\sigma_x \\
&= -(n-2)\,\omega_n \varphi(0).
\end{aligned}$$

Wir nehmen $\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1\, d\sigma$ wie auf Seite 44. Dann gilt im Sinne von Distributionen:

$$-\Delta\left(\frac{1}{(n-2)\,\omega_n} |\cdot|^{2-n} \right) = \delta(\cdot). \tag{8.13}$$

Hier ist δ das n-dimensionale Dirac-Funktional in 0:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \text{ für } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \text{ oder } \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Für $n = 2$ findet man

$$-\Delta\left(\frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{|\cdot|} \right) \right) = \delta(\cdot). \tag{8.14}$$

Beispiel 8.17 *Ebenso kann man zeigen, dass für $y \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ gilt:*

$$-\Delta\left(\frac{1}{(n-2)\,\omega_n} |\cdot - y|^{2-n} \right) = \delta_y(\cdot). \tag{8.15}$$

Hier ist y also nur ein Parameter und (8.15) heißt

$$\int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} |x-y|^{2-n} \left(-\Delta\varphi(x)\right) dx = \varphi(y)$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ oder $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Diese letzte Formel gibt uns jedoch die Möglichkeit, φ zurückzufinden mittels $-\Delta\varphi$. Also, wenn $-\Delta u = f$ für eine gegebene Testfunktion f auch eine Testfunktion u als Lösung hat, dann gilt

$$u(y) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} |x-y|^{2-n} f(x)\, dx. \tag{8.16}$$

Man kann zeigen, dass die Formel in (8.16) nicht nur für Testfunktionen gilt. Zum Beispiel findet man für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger durch (8.16) eine Lösung u von

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \end{cases} \tag{8.17}$$

Aufgabe 8.5 *Für $f_n(x) = |x|^{4-n}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ gilt in distributionellem Sinne, wenn $n \geq 5$, dass*

$$\Delta^2 f_n = c_n \delta_0$$

Berechnen Sie c_n.

Beispiel 8.18 *Für $y \in \mathbb{R}^2$ gilt:*

$$-\Delta\left(\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{|\cdot - y|}\right)\right) = \delta_y(\cdot) \tag{8.18}$$

und auch hier folgt, dass wenn $-\Delta u = f$ für eine gegebene Testfunktion f auch eine Testfunktion u als Lösung hat, dass

$$u(y) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{|x-y|}\right) f(x)\,dx. \tag{8.19}$$

Ebenso wie im letzten Beispiel gilt diese letzte Formel nicht nur für Testfunktionen. Für $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit kompaktem Träger findet man durch (8.16) eine Lösung u von $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^2$. Wenn jedoch $f \geq 0$ gilt und f nicht trivial ist, dann folgt $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = -\infty$. Die zweite Bedingung in (8.17) ist in dem Fall nicht erfüllt.

Die Funktionen

$$x \to \log\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{und} \quad x \to |x|^{2-n} \tag{8.20}$$

mit $n \geq 3$, die Sie in den letzten Beispiele gesehen haben, kommen so oft vor, dass wir erinnern an deren Graphen in Abbildung 8.4.

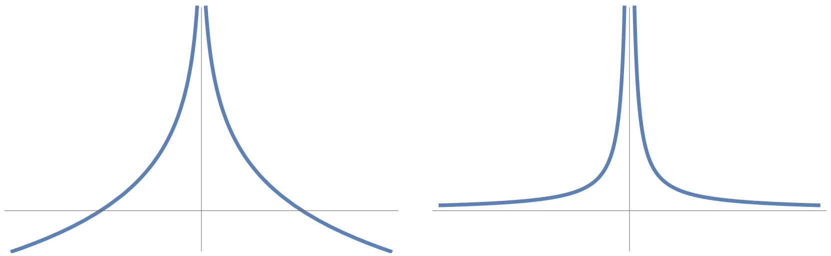


Abbildung 8.4: Skizzen zu den Funktionen in (8.20). Links die Funktion $x \mapsto \log\left(\frac{1}{|x|}\right)$, die negativ wird für $|x| > 1$, und rechts $x \mapsto \frac{1}{|x|}$. Auch die Skizzen zu (8.20) mit $n > 3$ sehen ähnlich aus wie der rechten Skizze.

Partielle Differentialgleichungen Woche 9

Die Wellengleichung in mehr Dimensionen

9.1 Kirchhoff für Raumdimension 3

Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung auf dem ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{9.1}$$

Wir versuchen anzugeben, wie man zu einer Lösungsformel kommt. Dies ist erstmal kein Beweis, sondern ein Versuch die kreativen Schritte anzugeben. Später muss das Ergebnis dann noch bewiesen werden.

1) Man betrachte erst den radialsymmetrischen Fall: $u(x_1, x_2, x_3, t) = U(|x|, t)$. Weil in 3 Raumdimensionen $\Delta u(|x|) = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u(r)_{|r=|x|}$ gilt, wird die Differentialgleichung wie folgt:

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \right) U(r,t) = 0.$$

Setzen wir $V(r,t) = r\, U(r,t)$ so folgt mit Hilfe von

$$\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} V(r,t) = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \left(\frac{1}{r} V_r(r,t) - \frac{1}{r^2} V(r,t) \right) =$$
$$= \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r V_r(r,t) - V(r,t) \right) = \frac{1}{r} V_{rr}(r,t),$$

dass

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \partial_r^2 \right) V(r,t) = 0.$$

2) Diese Gleichung ist die Wellengleichung in einer Raumdimension und die Lösungen dieser Gleichung haben die Form

$$V(r,t) = \Phi(r - ct) + \Psi(r + ct).$$

Man findet

$$U(r,t) = \frac{1}{r}\Phi(r - ct) + \frac{1}{r}\Psi(r + ct).$$

und radialsymmetrische Lösungen der Wellengleichung in 3 Raumdimensionen durch

$$u(x,t) = \frac{1}{|x|}\Phi(|x| - ct) + \frac{1}{|x|}\Psi(|x| + ct).$$