

Die Wellengleichung in mehr Dimensionen

9.1 Kirchhoff für Raumdimension 3

Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung auf dem ganzen Raum \mathbb{R}^3 ist

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (9.1)$$

Wir versuchen anzugeben, wie man zu einer Lösungsformel kommt. Dies ist erstmal kein Beweis, sondern ein Versuch die kreativen Schritte anzugeben. Später muss das Ergebnis dann noch bewiesen werden.

1) Man betrachte erst den radialsymmetrischen Fall: $u(x_1, x_2, x_3, t) = U(|x|, t)$. Weil in 3 Raumdimensionen $\Delta u(|x|) = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u(r)|_{r=|x|}$ gilt, wird die Differentialgleichung wie folgt:

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \right) U(r, t) = 0.$$

Setzen wir $V(r, t) = r U(r, t)$ so folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} V(r, t) &= \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \left(\frac{1}{r} V_r(r, t) - \frac{1}{r^2} V(r, t) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r V_r(r, t) - V(r, t)) = \frac{1}{r} V_{rr}(r, t), \end{aligned}$$

das

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_r^2) V(r, t) = 0.$$

2) Diese Gleichung ist die Wellengleichung in einer Raumdimension und die Lösungen dieser Gleichung haben die Form

$$V(r, t) = \Phi(r - ct) + \Psi(r + ct).$$

Man findet

$$U(r, t) = \frac{1}{r} \Phi(r - ct) + \frac{1}{r} \Psi(r + ct).$$

und radialsymmetrische Lösungen der Wellengleichung in 3 Raumdimensionen durch

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct) + \frac{1}{|x|} \Psi(|x| + ct).$$

Eine Funktion $u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct)$ wäre eine radialsymmetrische Welle, die sich mit Geschwindigkeit c nach außen bewegt. Die sich nach innen bewegenden Wellen geben Probleme bei $|x| = 0$ und daher lassen wir sie außer Betracht.

3) Analog einer Raumdimension könnte man eine Distribution formal als generalisierte Lösung ansetzen:

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \delta(|x| - ct) = \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct).$$

Die letzte Gleichung folgt, weil $|x| = ct$ gilt auf dem Träger von $x \mapsto \delta(|x| - ct)$. Als Distribution in \mathbb{R}^3 mit t als Parameter wäre das:

$$\begin{aligned} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{ct} \int_{|x|=ct} \varphi(x) d\sigma_x \\ &= ct \int_{|z|=1} \varphi(ctz) d\sigma_z =: ct \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \varphi(ct\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Für $\omega \in \mathbb{S}^2$ schreiben wir weiter $|\omega| = 1$. Es gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \partial_t F_{u(\cdot, t)}(\varphi) &= \\ \lim_{t \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} (c \varphi(ct\omega) + c^2 t \omega \cdot \nabla \varphi(ct\omega)) d\omega &= 4\pi c \varphi(0). \end{aligned}$$

Formal scheint $F_{u(\cdot, t)}$ das nächste Anfangswertproblem als Distribution zu erfüllen

$$\begin{cases} \partial_t^2 F_{u(\cdot, t)} - c^2 \Delta F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t > 0, \\ F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t = 0, \\ \partial_t F_{u(\cdot, t)} = 4\pi c \delta_0 & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

4) Ähnlich wäre $u(x, t) = \frac{1}{4\pi c|x|} \delta(|x - y| - ct)$ so, dass die Distribution $F_{u(\cdot, t)}$ eine Lösung ist von

$$\begin{cases} \partial_t^2 F_{u(\cdot, t)} - c^2 \Delta F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t > 0, \\ F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t = 0, \\ \partial_t F_{u(\cdot, t)} = \delta_y & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Welle, die in y startet. Wie in einer Dimension kann man vermuten, dass, wenn man die Delta-Funktionen durch eine Dichte v_0 ersetzt, dies eine Lösung von (9.1) wäre mit $f = u_0 = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi c^2 t} \delta(|x - y| - ct) v_0(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

5) Hat man eine genügend oft differenzierbare Lösung $u(x, t)$ von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (9.4)$$

dann erfüllt $w(x, t) := \partial_t u(x, t)$ formal

$$w_{tt} = u_{ttt} = c^2 \Delta u_t = c^2 \Delta w$$

und

$$w(x, 0) = u_t(x, 0) = v_0(x),$$

und

$$w_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = c^2 \Delta u_{xx}(x, 0) = 0.$$

Das folgende Theorem sagt, dass diese Überlegungen tatsächlich eine Lösung zu den Anfangswerten u_0 und v_0 liefern.

Theorem 9.1 (Die Formel von Kirchhoff¹) Sei $f = 0$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann hat (9.1) eine Lösung in $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \quad (9.5)$$

Aufgabe 9.1 Begründen Sie, dass $\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} 1 d\sigma_y = t$.

Bemerkung 9.1.1 Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man zwei Kegelränder, die schematisch (die Bodenplatte soll \mathbb{R}^3 darstellen) in Abbildung 9.1 dargestellt sind.

Bemerkung 9.1.2 Die Formel in (9.5) kann man auch wie folgt schreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} (tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)) d\sigma_y$$

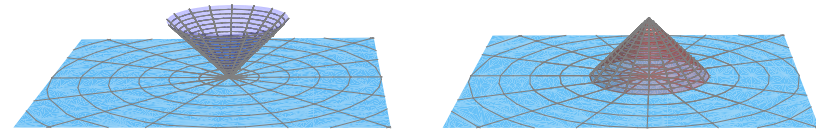


Abbildung 9.1: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 3 Dimensionen. Nach oben die Zeit; in blau das dreidimensionale(!) \mathbb{R}^3 für $t = 0$. Nur der Rand des Kegels zählt.

Beweis, dass die Anfangsbedingungen durch (9.5) erfüllt sind. Weil v_0 stetig differenzierbar und u_0 zweimal stetig differenzierbar ist, folgt für die erste Randwertbedingung:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_0(x + ct\omega) d\omega \right) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (u_0(x + ct\omega) + ct\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega)) d\omega \\ &= u_0(x). \end{aligned}$$

Für die zweite Randwertbedingung finden wir

$$\lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right) = v_0(x)$$

¹Gustav Robert Kirchhoff, Königsberg 1824 – Berlin 1887.

und

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \downarrow 0} \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \left(2c\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) \right. \\
&\quad \left. + ct \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_0(x + ct\omega) \right) d\omega \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) d\omega \\
&= \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x) d\omega = 0.
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir benutzt, dass für $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{|\omega|=1} \omega \cdot \vec{v} d\omega = 0.$$

Also sind die Anfangsbedingungen erfüllt. \blacksquare

Bevor wir zeigen können, dass die Differentialgleichung erfüllt ist, brauchen wir das folgende Lemma:

Lemma 9.2 Sei $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ mit $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $n > 2$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy \\
&= u(0) - \frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y \\
&\quad - \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Bemerkung 9.2.1 Für $n = 3$ folgt

$$\begin{aligned}
& \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{4\pi |y|} dy \\
&= u(0) - \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Beweis. Man braucht Gauß,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u - \nabla v u) d\sigma_x + \int_{\Omega} (\Delta v) u dx,$$

die Tatsache, dass $y \mapsto |y|^{2-n}$ harmonisch außerhalb 0 ist,

$$\begin{aligned}
\Delta |y|^{2-n} &= \nabla \cdot \nabla |y|^{2-n} = \nabla \cdot ((2-n)|y|^{-n} y) \\
&= (2-n)(-n|y|^{-n-2} y \cdot y + n|y|^{-n}) = 0
\end{aligned}$$

und, dass $y \mapsto |y|^{2-n}$ integrierbar ist bei 0:

$$\begin{aligned}
& \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\left(\int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) \right. \\
&\quad \left. (-|y|^{2-n} \nabla u(y) + u(y) \nabla |y|^{2-n}) \cdot \nu d\sigma_y \right. \\
&\quad \left. + \int_{\varepsilon < |y| < R} -(\Delta |y|^{2-n}) u(y) dy \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) \\
&\quad \left(-|y|^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) |y|^{-n} y \cdot \frac{y}{|y|} \right) d\sigma_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|y|=R} (-R^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) R^{1-n}) d\sigma_y \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y|=\varepsilon} (\varepsilon^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (n-2) \varepsilon^{1-n}) d\sigma_y \\
&= \frac{-1}{R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{n-2}{R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) + (n-2) \omega_n u(0).
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist verwendet worden, dass der Flächeninhalt von $\partial B_\varepsilon(0)$ gleich $\omega_n \varepsilon^{n-1}$ ist. ■

Fortsetzung des Beweises von Theorem 9.1 .

Wir zeigen nun, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und fangen an mit dem Teil, der zu v_0 gehört:

$$\begin{aligned}
c^2 \Delta_x \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y &= \Delta_x \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega \\
&= \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \Delta_x v_0(x + ct\omega) d\omega = \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (\Delta v_0)(x + ct\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi t} \int_{|z|=ct} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z = \int_{|z|=ct} \frac{c}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z \\
&= \partial_t \int_{r=0}^{ct} \int_{|z|=r} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dr d\sigma_z \\
&= \partial_t \int_{|z|<ct} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dz = (*).
\end{aligned}$$

Durch Verwendung des Lemmas folgt

$$\begin{aligned}
(*) &= \partial_t \left(-v_0(x) + \frac{1}{4\pi c t} \int_{|z|=ct} \nabla v_0(x+z) \cdot \nu d\sigma_z \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|z|=ct} v_0(x+z) d\sigma_z \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \partial_t \left(\int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|} \nabla v_0(x+z) \cdot \nu d\sigma_z \right. \\
&\quad \left. + \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} v_0(x+z) d\sigma_z \right) = (**).
\end{aligned}$$

Es folgt weiter mit $\nu = \frac{z}{|z|} = \omega$ und ' $d\sigma_z = |z|^2 d\omega$ ', dass

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{4\pi} \partial_t \left(\int_{|\omega|=1} \left(r \nabla v_0(x+r\omega) \cdot \omega + v_0(x+r\omega) \right) d\omega \right)_{r=ct} \\
&= \frac{1}{4\pi} \partial_t \left(\int_{|\omega|=1} \partial_r \left(r v_0(x+r\omega) \right) d\omega \right)_{r=ct} \\
&= \frac{1}{4\pi c} \partial_t^2 \int_{r=0}^{ct} \left(\int_{|\omega|=1} \partial_r \left(r v_0(x+r\omega) \right) d\omega \right) dr = (***) ,
\end{aligned}$$

wiederum wegen des Hauptsatzes der Integralrechnung. Die Fortsetzung liefert durch Vertauschung der Integrale,

$$\begin{aligned}
(***) &= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^{ct} \partial_r \left(r v_0(x+r\omega) \right) dr d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c} \int_{|\omega|=1} \left[r v_0(x+r\omega) \right]_{r=0}^{ct} d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c} \int_{|\omega|=1} ct v_0(x+ct\omega) d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right)
\end{aligned}$$

und es folgt, dass dieser Teil die Differentialgleichung erfüllt. Für den zweiten Teil können wir uns nun kurz fassen:

$$\begin{aligned} & c^2 \Delta_x \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\ &= \partial_t c^2 \Delta_x \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\ &= \partial_t^2 \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right), \end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. ■

Auch hier kann man für f das Prinzip von Duhamel verwenden. Da dieses Prinzip in jeder Dimension gilt, betrachten wir gleich die allgemeine Version.

9.2 Ergebnisse für beliebige Dimensionen

Proposition 9.3 (Prinzip von Duhamel) Sei $u_0 = v_0 = 0$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ und sei die Funktion $(x, t) \mapsto U(x, t; s)$ mit

$$U \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0 \leq s \leq t < \infty])$$

für jedes $s \geq 0$ eine Lösung von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2 \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \end{cases} \quad (9.6)$$

dann ist

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds. \quad (9.7)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.8)$$

Beweis. Ähnlich wie in einer Dimension zeigt man:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \int_0^t U(x, t; s) ds &= \partial_t \left(U(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \right) \\ &= 0 + \partial_t \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \\ &= (\partial_t U(x, t; s))_{s=t} + \int_0^t \partial_t^2 U(x, t; s) ds \\ &= f(x, s) + \int_0^t c^2 \Delta U(x, t; s) ds \\ &= f(x, s) + c^2 \Delta \int_0^t U(x, t; s) ds \end{aligned}$$

und dies ist genau die Gleichung, die u aus (9.7) erfüllen sollte. Die Anfangsbedingungen kontrolliert man direkt. ■

Die Ableitung der Kirchhoffschen Formel mag rätselhaft erscheinen. Wenn man hinterher zeigen kann, dass das Ergebnis stimmt, soll uns das eigentlich keine Sorgen bereiten. Trotzdem ist es vernünftig, dieser Ableitung etwas Beachtung zu geben. Die Idee dahinter kann man wie folgt verstehen. Der Δ -Differentialoperator ist drehungsinvariant:

$$\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R \text{ für beliebige Drehungen } R,$$

denn sei M eine orthogonale Matrix, so findet man $MM^T = I$ und

$$\begin{aligned} \Delta(u(Mx)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n M_{ji} M_{ki} (\partial_k \partial_j u)(Mx) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n M_{ji} M_{ki} \right) (\partial_k \partial_j u)(Mx) \\ &= \sum_{j,k=1}^n (MM^T)_{jk} (\partial_k \partial_j u)(Mx) \\ &= \sum_{k=1}^n (\partial_k^2 u)(Mx) = (\Delta u)(Mx). \end{aligned}$$

Weil wir eine lineare Differentialgleichung betrachten, kann man auch eine Summe, oder sogar ein Integral von solchen Drehungen betrachten, wenn man bei der rechten Seite die gleiche Summe oder Integral der rechten Seiten und ähnlich auch die passenden Anfangswerte nimmt.

Proposition 9.4 (Euler - Poisson - Darboux²)

Wenn $(t, x) \mapsto u(t, x)$ eine Lösung ist in $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, t) = g(x) \text{ und } u_t(x, t) = h(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (9.9)$$

² • Leonhard Euler, Basel 1707 – St. Petersburg 1783.
 • Siméon Denis Poisson, 1781 – 1840, hat sich nie weit von Paris entfernt. Die folgende Aussage wird ihm zugeschrieben: *La vie n'est bonne qu'à deux choses: à faire des mathématiques et à les professer.* Siehe Seite 115 für ein Bild.
 • Jean Gaston Darboux, Nîmes 1842 – Paris 1917.

dann ist

$$U(r, t) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (9.10)$$

mit

$$G(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} g(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y}, \quad H(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} h(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (9.11)$$

eine Lösung in $C^2((0, \infty) \times [0, \infty))$ von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 \text{ für } r, t > 0, \\ U(r, t) = G(r) \text{ und } U_t(r, t) = H(r) \text{ für } r > 0, \end{cases} \quad (9.12)$$

mit

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} U(r, t) &= u(x, t), \quad \lim_{r \downarrow 0} U_r(r, t) = 0 \\ \lim_{r \downarrow 0} U_{rr}(r, t) &= \frac{1}{n} \Delta u(x, t). \end{aligned}$$

Bemerkung 9.4.1 Die Differentialgleichung in (9.12) nennt man die Euler-Poisson-Darboux Gleichung.

Beweis. Man hat

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} &= \frac{\int_{|\omega|=1} u(x + r\omega, t) r^{n-1} d\omega}{\int_{|\omega|=1} r^{n-1} d\omega} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} u(x + r\omega, t) d\omega \end{aligned}$$

und so folgt mit Gauß

$$\begin{aligned}\partial_r U(r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} \nabla u(x + r\omega, t) \cdot \omega d\omega \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|z|=r} \nabla u(x + z, t) \cdot \nu d\sigma_z \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|z|<r} \Delta u(x + z, t) dz.\end{aligned}\quad (9.13)$$

Aus (9.13) folgt

$$\partial_r U(r, t) = \frac{r \int_{|z|<r} \Delta u(x + z, t) dz}{n \int_{|z|<r} 1 dz}$$

und anschließend $\lim_{r \downarrow 0} U_r(r, t) = 0$ und $\lim_{r \downarrow 0} U_{rr}(r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$. Weiter folgt aus (9.13), dass

$$\begin{aligned}c^2 \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) &= \partial_r \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{|z|<r} u_{tt}(x + z, t) dz \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=r} u_{tt}(x + z, t) d\sigma_z \\ &= r^{n-1} \frac{\int_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} = r^{n-1} U_{tt}(r, t).\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen für U zeigt man direkt. ■

Diese letzte Proposition liefert uns auch die Eindeutigkeit der Lösung in Raumdimension 3.

Theorem 9.5 *Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in (9.1) hat höchstens eine Lösung in $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$.*

Beweis. Wenn (9.1) zwei Lösungen hat, sagen wir u_1 und u_2 , dann löst $w = u_1 - u_2$ das Randwertproblem mit $f = u_0 = v_0 = 0$. Nehmen wir an, es gibt $w(\tilde{x}, \tilde{t}) \neq 0$. Ohne Verlust der Allgemeinheit nehmen wir $\tilde{x} = 0$. Weil Δ invariant unter orthogonalen Abbildungen ist, folgt für

$$U(r, t) = \frac{\int_{\partial B_r(0)} w(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(0)} 1 d\sigma_y},$$

dass $U_{tt} - c^2 r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r U = 0$. Setzen wir

$$V(r, t) = rU(r, t)$$

so folgt

$$\begin{aligned}r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r U &= r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r r^{-1} V \\ &= r^{-2} \partial_r (-V + r \partial_r V) = r^{-1} \partial_r^2 V\end{aligned}$$

und weiter, dass $V(r, t)$ eine Lösung der Wellengleichung in einer Dimension ist mit $V(r, 0) = V_t(r, 0) = 0$ für $r > 0$ und $V(0, t) = 0$. Diese Lösung ist eindeutig und daher gilt $V(r, t) = 0$ für alle $r, t > 0$ und auch $U(r, t) = 0$ für alle $r, t > 0$. Dann findet man

$$w(0, \tilde{t}) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} w(r\omega, \tilde{t}) d\omega = \lim_{r \downarrow 0} U(r, \tilde{t}) = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch. ■

9.3 Poisson für Raumdimension 2

Rechts finden Sie ein Bild von Siméon Denis Poisson.



Eine Lösungsformel wie die von Kirchhoff lässt sich in 2 Dimensionen nicht direkt herleiten. Wenn man die Formel in drei Dimensionen verwendet für Funktionen, die in einer Richtung konstant sind, bekommt man eine Formel für das zweidimensionale Problem. Anders gesagt, statt

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ und } u_t(x, 0) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (9.14)$$

betrachten wir das ähnliche Problem in \mathbb{R}^3 mit $\tilde{u}_0(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2)$ und $\tilde{v}_0(x_1, x_2, x_3) = v_0(x_1, x_2)$. Die Kirchhoffsche Formel gibt uns eine Lösung $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = & \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{v}_0(y) d\sigma_y \\ & + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{u}_0(y) d\sigma_y \right). \end{aligned}$$

Weil \tilde{u}_0 und \tilde{v}_0 jedoch nicht von x_3 abhängen, und die Lösung \tilde{u} eindeutig ist, hängt auch \tilde{u} nicht von x_3 ab. Denn wenn \tilde{u}

von x_3 abhängen würde, wären

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \tilde{u}(x_1, x_2, x_3) \text{ und} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + 1) \end{aligned}$$

zwei verschiedene Lösungen. Es folgt außerdem, dass

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x|=ct, y \in \mathbb{R}^3} \tilde{u}_0(y_1, y_2, y_3) d\sigma_y \\ &= \int_{|y-(x_1, x_2, 0)|=ct, y \in \mathbb{R}^3} \tilde{u}_0(y_1, y_2, y_3) d\sigma_y \\ &= 2 \int_{|z| \leq ct, z \in \mathbb{R}^2} u_0(x+z) \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} dz. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Hier beschreibt w die dritte Koordinate y_3 auf der Sphäre $\{y \in \mathbb{R}^3; |y - (x_1, x_2, 0)| = ct\}$ als Funktion von (z_1, z_2) , das heißt

$$(y_1, y_2, y_3) = \gamma(z_1, z_2) := (x_1 + z_1, x_1 + z_2, w(z_1, z_2))$$

mit $w(z_1, z_2) = \pm \sqrt{c^2 t^2 - z_1^2 - z_2^2}$.

Die 2 in (9.15) folgt, weil man zwei Hälften hat, die obere und die untere Sphäre. Der Faktor $\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}$ folgt aus der Parametrisierung γ durch

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} & \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_2} \\ \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_1} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_2} \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}. \end{aligned}$$

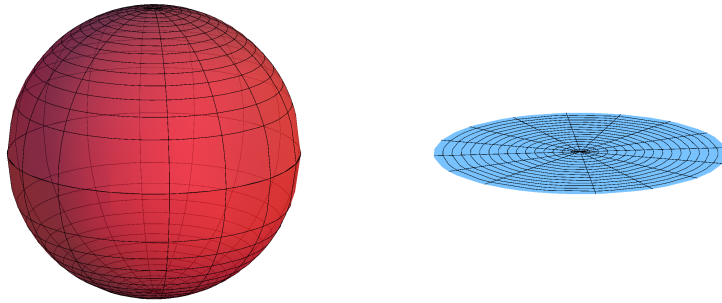


Abbildung 9.2: Statt über die Sphäre $\partial B_{ct}(x_1, x_2, 0)$ in \mathbb{R}^3 integriert man über eine Scheibe $B_{ct}(x_1, x_2)$ in \mathbb{R}^2 .

Mit

$$\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} = \sqrt{1 + \frac{|z|^2}{c^2 t^2 - |z|^2}} = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |z|^2}}$$

findet man:

Theorem 9.6 (Die Formel von Poisson) Sei $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Die Lösung von (9.14) ist für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| < ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy + \partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| < ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right). \quad (9.16)$$

Bemerkung 9.6.1 Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man in Dimension 2 zwei gefüllte Kegel, die in Abbildung 9.3 dargestellt sind.

Bemerkung 9.6.2 Wenn man auch für eine rechte Seite $f(x, t)$ lösen möchte, kann man wiederum das Prinzip von Duhamel verwenden.

Bemerkung 9.6.3 Diese Idee, mit der Dimension abzustiegen, wird Hadamard zugeschrieben.

Aufgabe 9.2 1. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi c} \int_{|x-y| < ct} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

2. Können Sie das Ergebnis erklären mit Hilfe der Differentialgleichung?

Lemma 9.7 Man kann die Formel in (9.16) wie folgt umschreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

Aufgabe 9.3 Sei $u_0 \geq 0$. Gibt es v_0 und T derart, dass für die Lösung in (9.16) gilt

$$u(x, t) = 0 \text{ für alle } t > T?$$

Beweis. Wir brauchen nur die zweite Hälfte von (9.16) zu betrachten und benutzen da die Substitution $y = x + ctr\omega$ mit $r \in (0, 1)$ und $\omega \in \mathbb{R}^2$ mit $|\omega| = 1$. Für $n = 2$ gilt

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und symbolisch $d\omega := d\varphi$. So finden wir mit der Jacobi-Determinante, dass

$$dy_1 dy_2 = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(ctr \cos \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(ctr \cos \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(ctr \sin \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(ctr \sin \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right| dr d\omega = c^2 t^2 r dr d\omega.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right) \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{t u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{u_0(x + ctr\omega) + t cr\omega \cdot \nabla u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| < ct} \frac{u_0(y) + (y-x) \cdot \nabla u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy, \end{aligned}$$

die Formel im Lemma. ■

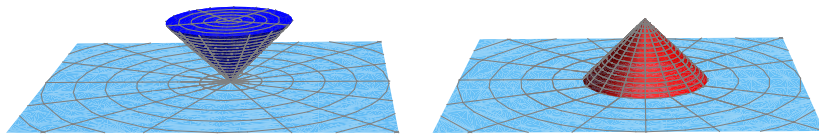


Abbildung 9.3: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 2 Dimensionen; die Zeit nach oben und in blau $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Im Gegensatz zu 3 Dimensionen sind die Kegel nun gefüllt.

Die Eindeutigkeit der Lösung in zwei Raumdimensionen folgt aus der Eindeutigkeit in drei Raumdimensionen.

9.4 Raumdimensionen 4 und höher

Wir betrachten erst die ungeraden Raumdimensionen. Wenn wir da Existenz, Eindeutigkeit oder sogar eine explizite Formel für eine Lösung gefunden haben, können wir mit dem Absteigetricke von Hadamard auch die geraden Raumdimensionen angehen.

Wir definieren für eine Funktion $(x, t) \mapsto u(x, t)$ die (9.9) erfüllt, wie in (9.10) die Funktion $(r, t) \mapsto U(r, t)$. Ähnlich werden auch G und H wie in (9.11) definiert.

Lemma 9.8 Sei $n \geq 3$ ungerade. Wenn $(r, t) \mapsto U(r, t)$ eine $\frac{1}{2}(n+1)$ -mal differenzierbare Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 \text{ für } r, t > 0, \\ U(r, t) = G(r), U_t(r, t) = H(r) \text{ für } r > 0, \end{cases} \quad (9.17)$$

dann ist $(r, t) \mapsto \tilde{U}(r, t)$, definiert durch

$$\tilde{U}(r, t) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t))$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt}(r, t) - c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) = 0 \text{ für } r, t > 0, \\ \tilde{U}(r, t) = \tilde{G}(r), \tilde{U}_t(r, t) = \tilde{H}(r) \text{ für } r > 0, \end{cases} \quad (9.18)$$

bei der \tilde{G} und \tilde{H} wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r) &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} G(r)), \\ \tilde{H}(r) &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} H(r)). \end{aligned}$$

Beweis. Schreibe $k = \frac{1}{2}(n-3)$. Man kann zeigen, dass

$$\partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^k r^{2k+1} f(r) = (r^{-1} \partial_r)^{k+1} r^{2k+2} \partial_r f(r).$$

Für $f(r) = r^\alpha$ folgt, dass die Gleichung stimmt, denn links und rechts steht dann folgendes:

$$\alpha(2k+1+\alpha)(2k-1+\alpha)\dots(3+\alpha)(1+\alpha)r^{\alpha-1},$$

und so gilt es für Polynome, die dicht in $C^m[a, b]$ liegen.

Damit findet man

$$\begin{aligned} c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) &= c^2 \partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) \\ &= c^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{-1} \partial_r) r^{n-1} \partial_r U(r, t) \\ &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} r^{n-2} (c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t)) \\ &= \partial_t^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) = \partial_t^2 \tilde{U}(r, t). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen kontrolliert man sofort. ■

Man kann nun wieder raten, wie die Lösungsformel in ungeraden Dimensionen sein wird für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.19)$$

Verwendet man den Absteigetricke von Hadamard, dann findet man auch eine Formel für gerade Raumdimensionen.

Die Eindeutigkeit einer solchen Lösung kann man mit Hilfe von Lemma 9.8 wie in Theorem 9.5 beweisen.

Nur für die Vollständigkeit geben wir im nächsten Theorem die expliziten Formeln.

Theorem 9.9 Sei $n \in \mathbb{N}$, $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $f = 0$, $u_0 \in C^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ und $v_0 \in C^{m+1}(\mathbb{R})$.

- Wenn n ungerade ist, hat (9.19) die folgende Lösung:

$$u(x, t) = C_n \left((t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \right).$$

$$\text{Es gilt } C_n = \frac{1}{\omega_n(n-2)(n-4)\dots 5 \ 3 \ 1}.$$

- Wenn n gerade ist, hat (9.19) die folgende Lösung:

$$u(x, t) = D_n \left((t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \int_{|y-x|<ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \left(\int_{|y-x|<ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y \right) \right).$$

$$\text{Es gilt } D_n = \frac{1}{\omega_n n(n-2)(n-4)\dots 4 \ 2}.$$

$$\text{Wie vorher: } \omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma.$$

Die Beweise dieser Formeln sind ähnlich wie die für die Formeln von Kirchhoff (9.5) und Poisson (9.16).

9.5 Gebiete mit Rand

Eine natürliche Frage ist, was passiert, wenn man die Wellengleichung nicht auf ganz \mathbb{R}^n sondern nur auf ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lösen möchte. Man kann zeigen, dass das folgende Anfangs/Randwertproblem sinnvoll ist im Sinne von Hadamard:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.20)$$

Nur in einigen einfachen Fällen, wie zum Beispiel beim Halbraum $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$, kann man eine explizite Formel für die Lösung herleiten. Für allgemeinere Gebiete gibt es kaum derartige explizite Formeln und wir müssen andere mathematische Werkzeuge anwenden. Aber auch ohne solche Formeln kann man die Fragen von Hadamard zu einem solchen Problem angehen und für (9.20) Existenz, Eindeutigkeit und Robustheit zeigen.

Theorem 9.10 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n . Dann hat (9.20) höchstens eine Lösung in $C^2(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$.*

Beweis. Wenn es zwei Lösungen gäbe, sagen wir u_1 und u_2 , dann wäre $u = u_1 - u_2$ eine Lösung von (9.20) mit $f = u_0 = v_0 = \varphi = 0$. Betrachte die Funktion

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, t)^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx.$$

Man nennt diese Funktion die Energie. Es gilt, wenn wir den zweiten Term partiell integrieren, dass

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} (u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + c^2 \nabla u(x, t) \cdot \nabla u_t(x, t)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x, t) u_t(x, t) d\sigma_x \\ &\quad + \int_{\Omega} u_t(x, t) (u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t)) dx = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden wir, dass

$$u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0$$

und dass aus $u(x, t) = 0$ für $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ folgt $u_t = 0$ auf $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$. Also gilt

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, 0)^2 + c^2 |\nabla u(x, 0)|^2) dx = 0.$$

Hier verwendet man $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$. Weil in $E(t)$ die Summe zweier Quadrate ist, folgt $u_t(x, t) = 0 = \nabla u(x, t)$ für alle $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$. Wenn alle Ableitungen 0 sind, ist die Funktion konstant. Weil u am Rand 0 ist, gilt $u = 0$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Es gibt also nur eine Lösung. ■

Aufgabe 9.4 *Wir betrachten stehende Wellen für die Einheitskugeln in \mathbb{R}^n , das heißt Lösungen von*

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } |x| < 1 \text{ und } t > 0, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } |x| = 1 \text{ und } t > 0, \end{cases}$$

der Form

$$u(x, t) = U(x) \cos(\lambda t).$$

Die Lösungen mit dem kleinsten λ sind radialsymmetrisch.

1. Für $n = 1$ findet man

$$U(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ und } \lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie, dass man so eine stehende Welle findet.

2. Für $n = 3$ findet man

$$U(x) = \frac{\sin(\pi|x|)}{|x|} \text{ und } \lambda = \pi.$$

Zeigen Sie, dass man so eine stehende Welle findet.

3. Welche Differentialgleichung für U finden Sie für $n = 2$?
Können Sie diese lösen?