

## Die Wärmeleitungsgleichung I

Eine typische Frage bei der parabolischen Differentialgleichung  $(\partial_t - \Delta)u = 0$  betrifft die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (10.1)$$

Der Wert  $u(t, x)$  stellt die Temperatur an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  dar bei durch  $u_0$  gegebenen Anfangswerten. Wenn  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , braucht man keine Randwerte. Wenn es einen Rand  $\partial\Omega$  gibt, kann man aus physikalischen Gründen vermuten, dass ein solcher Rand die Lösung mitbestimmt. Es wäre möglich den Fall zu betrachten, dass der Rand isoliert ist und dies würde bedeuten, dass keine Wärme herausfließt:  $\partial_\nu u(x, t) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Statt eines isolierten Randes könnte man am Rand die Temperatur festlegen:  $u(x, t) = \varphi(x, t)$  für  $x \in \partial\Omega$ . Im Gegensatz zu der Wellengleichung werden wir bei der Wärmeleitungsgleichung sehen, dass dieser Einfluss vom Randverhalten sich mit unendlicher Geschwindigkeit im Gebiet verbreitet. Physikalisch widerspricht es der Annahme, dass sich nichts schneller als die Lichtgeschwindigkeit verbreiten kann.

### 10.1 Diffusionskern

Die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1

$$(\partial_t - \partial_x^2) u(x, t) = 0 \quad (10.2)$$

hat die folgende Skalierungseigenschaft. Wenn  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  eine Lösung ist, dann ist  $(x, t) \mapsto u(cx, c^2t)$  für jede  $c \in \mathbb{R}^+$  auch eine Lösung. Wenn wir nun eine Lösung suchen, die für jedes  $c \in \mathbb{R}^+$  die gleiche Funktion liefert, dann findet man für  $c = t^{-1/2}$ , dass  $u(cx, c^2t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$ . Versuchen wir dies und betrachten eine Lösung in der Form

$$(x, t) \mapsto u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Dann hätte man eine Funktion, die nur von einer Variablen abhängt, nämlich  $\xi := \frac{x}{\sqrt{t}}$ . Setzt man

$$v(\xi) = u(\xi, 1)$$

so folgt für  $v$  die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_t - \partial_x^2) v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{-x}{2t\sqrt{t}} - v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{t} = \\ &= -\frac{1}{t} \left(\frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi)\right). \end{aligned}$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man lösen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi) &= 0, \\ \frac{v''(\xi)}{v'(\xi)} &= -\frac{1}{2}\xi \quad (\text{oder } v'(\xi) = 0), \\ \ln|v'(\xi)| &= -\frac{1}{4}\xi^2 + c_1, \\ v'(\xi) &= c_2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \end{aligned}$$

und man findet

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = c_2 \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi + c_3.$$

Wenn wir  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  und  $c_3 = 0$  setzen<sup>1</sup> folgt

$$U(x) := \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

<sup>1</sup>Die Standardrechnung mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi &= 2\sqrt{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2} e^{-\frac{1}{4}y^2} dx dy} \\ &= 2\sqrt{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{4}r^2} dr d\varphi} = \sqrt{4\pi}. \end{aligned}$$

Im Sinne von Distributionen gilt  $\partial_x U = \delta$  und mit einer Verschiebung

$$\partial_x U(\cdot - y) = \delta_y.$$

Dies läßt uns vermuten, dass man eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (10.3)$$

bekommen könnte durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) dy.$$

**Aufgabe 10.1** Wir setzen

$$U(x, t; y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi.$$

1. Zeigen Sie, dass  $(x, t) \rightarrow U(x, t; y)$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 & \text{für } x < y, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 1 & \text{für } x > y. \end{cases}$$

2. Seien  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$  und  $c_i \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $(x, t) \rightarrow \sum_{i=1}^n c_i U(x, t; y_i)$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 & \text{für } x < y_1, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \sum_{k=1}^i c_k & \text{für } x \in (y_i, y_{i+1}), \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k & \text{für } x > y_n. \end{cases}$$

Es gilt

$$\partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

und das folgende Theorem:

**Theorem 10.1** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$  (stetig und beschränkt), dann ist  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0. \quad (10.4)$$

Außerdem folgt:

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (10.3),
- $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ,
- $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ,
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt

$$u \in C_b(\mathbb{R} \times [0, \infty)).$$

**Bemerkung 10.1.1** Die Funktion  $p(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$  nennt man die Fundamentallösung oder der Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1. Eine Skizze findet man in Abbildung 10.1.

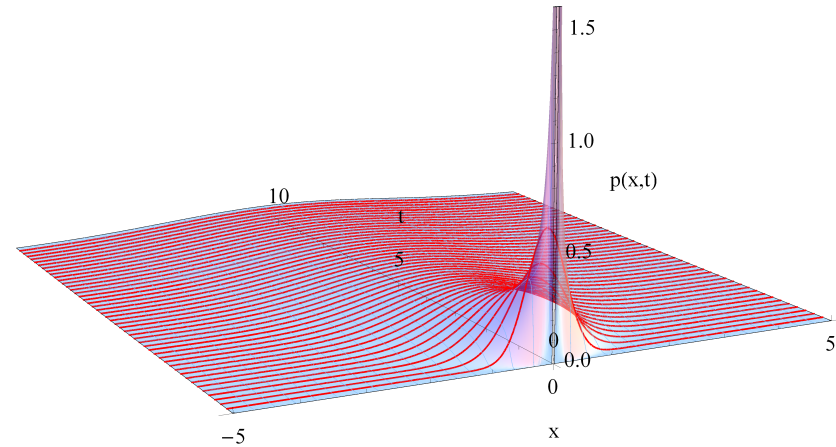


Abbildung 10.1: Eine Skizze des Diffusionskerns

**Bemerkung 10.1.2** Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zu der Wellengleichung.

1. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung hat eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.
2. Auch wenn  $u_0$  nur stetig ist, ist  $u(\cdot, t)$  für  $t > 0$  in (10.4) unendlich oft differenzierbar. Bei der Wellengleichung auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  ist der Lösungsteil von  $u(\cdot, t)$ , der von  $u_0$  abhängt, genauso oft differenzierbar wie  $u_0$ .

**Beweis.** Die Abschätzung nach oben im dritten Punkt folgt aus

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \|u_0\|_\infty dy = \|u_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit jeder Ordnung folgt für  $t > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  aus den Eigenschaften von  $\exp(-\frac{1}{4}(x-y)^2/t)$  und aus dem Satz zu dominierter Konvergenz<sup>2</sup>. Man kann also die Folge von Differenzieren und Integrieren vertauschen und findet  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

Die Differentialgleichung folgt aus

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \\ = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = 0 \text{ für } t > 0. \end{aligned}$$

Für  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  bemerkt man, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi.$$

Aus der dominierten Konvergenz, der Stetigkeit von  $u_0$  und

<sup>2</sup>Der Satz zu dominierter Konvergenz besagt, dass wenn

1.  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine positive Funktion ist mit  $\int_I g(x) dx < \infty$ ,
2. die Funktionen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  derart sind, dass  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für  $x \in I$ , und
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  konvergiert für fast alle  $x \in I$ ,

dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 1$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \downarrow 0} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x) d\xi = u_0(x). \end{aligned}$$

Es gilt also  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und diese Konvergenz ist gleichmäßig auf beschränkten Intervallen und sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ , wenn  $u_0$  gleichmäßig stetig ist. Weil

$$|u(x, t) - u_0(y)| \leq |u(x, t) - u_0(x)| + |u_0(x) - u_0(y)|$$

folgt wiederum mit der lokal gleichmäßigen Stetigkeit von  $u_0$ , dass

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (y,0) \\ t > 0}} u(x, t) = u_0(y)$$

und so auch die Stetigkeit der Erweiterung von  $u(\cdot, t)$  bei  $t = 0$  mit  $u_0$ . ■

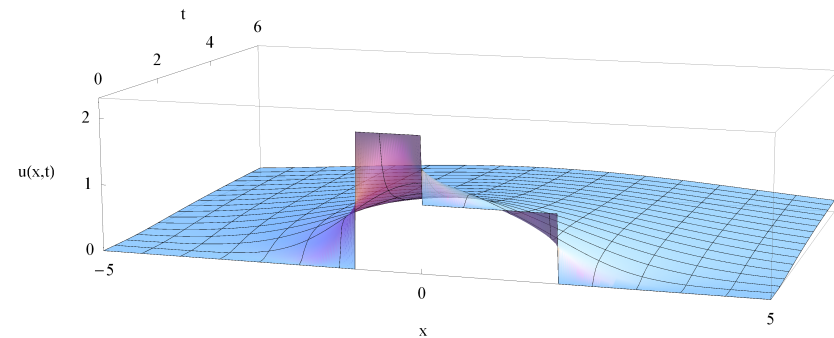


Abbildung 10.2: Darstellung der Funktion aus Beispiel 10.2.

**Beispiel 10.2** Man bekommt eine Lösung

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty) \setminus \{(-1, 0), (0, 0), (2, 0)\})$$

von (10.3) mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, -1), \\ 2 & \text{für } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, 2), \\ 0 & \text{für } x \in [2, \infty), \end{cases}$$

durch

$$u(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{t}}\right)$$

mit

$$\operatorname{erf}(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2} ds.$$

Obwohl diese Funktion nicht-stetige Anfangswerte hat, ist sie für  $t > 0$  sogar unendlich oft differenzierbar. Eine Skizze zu dieser Funktion findet man in Abbildung 10.3.

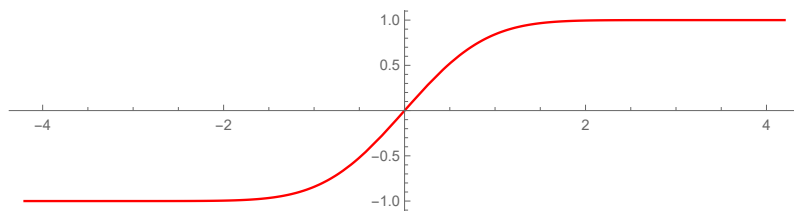


Abbildung 10.3: Skizze zu  $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$

**Aufgabe 10.2** Wir betrachten

$$u(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $u$  eine Lösung ist

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0.$$

2. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 \text{ für } x \neq 0.$$

3. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} u(\cdot, t) = \delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Eigentlich steht links  $F_{u(\cdot, t)}$  statt  $u(\cdot, t)$  wie in (8.3).

## 10.2 Das Anfangswertproblem in mehr Dimensionen

Für die Wärmeleitungsgleichung in mehr Dimensionen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (10.5)$$

hat man:

**Theorem 10.3** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$  (stetig und beschränkt), dann ist  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0. \quad (10.6)$$

Außerdem folgt:

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (10.5);
- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ ;
- $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ,
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt

$$u \in C_b(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)).$$

**Bemerkung 10.3.1** Die Funktion  $p$ , definiert durch

$$p_n(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \quad (10.7)$$

nennt man die Fundamentallösung oder Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension  $n$ .

**Beweis.** Wir zeigen, dass  $(x, t) \mapsto (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}$  für  $t > 0$  die Differentialgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_t \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}|x|^2 t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}, \\ \Delta \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= \nabla \cdot \left( -\frac{1}{2}x t^{-n/2-1} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) \\ &= t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}x \cdot x t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}. \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises ist ähnlich wie in einer Dimension. ■

**Aufgabe 10.3** Sei  $n = 2$ . Geben Sie eine Lösung von (10.5) an für

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x_1, x_2 < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 10.3 Wärmeleitungsgleichung mit rechter Seite

Wir betrachten anschließend die Wärmeleitungsgleichung mit einer Wärmequelle  $f$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (10.8)$$

Dazu nehmen wir die Lösungen  $U(\cdot, \cdot; s)$  von

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t; s) - \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, s; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (10.9)$$

Man bekommt eine Lösung von (10.9) durch eine Zeitverschiebung in (10.6):

$$U(x, t; s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy. \quad (10.10)$$

Ähnlich wie für die Wellengleichung hat man:

**Theorem 10.4 (Duhamel)** Sei  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Für die Funktion  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds, \quad (10.11)$$

mit  $U$  wie in (10.10), gilt

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (10.8);
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0$ ;
- $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Weil  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  findet man  $U(\cdot, \cdot; s) \in$

$C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$  und es folgt<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^t U(x, t; s) ds &= U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds. \end{aligned}$$

Man bekommt

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) \int_0^t U(x, t; s) ds \\ = U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t (\partial_t - \Delta) U(x, t; s) ds = f(x, t) \end{aligned}$$

und aus der Beschränktheit von  $f$ , die zur Beschränktheit von  $U$  führt, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_0^t U(x, t; s) ds = 0.$$

Die letzte Aussage folgt aus  $U(\cdot, \cdot; s) \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$ . ■

Kombiniert man (10.6), (10.10) und (10.11), so folgt:

<sup>3</sup>Sei  $v \in C^1(\{(s, t); 0 \leq s \leq t < \infty\})$ . Dann gilt für die rechte Ableitung von  $\int_0^t v(s, t) ds$ , dass:

$$\begin{aligned} \partial_t^+ \left( \int_0^t v(s, t) ds \right) &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{\int_0^{t+h} v(s, t+h) ds - \int_0^t v(s, t) ds}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s, t+h) ds + \int_0^t \frac{v(s, t+h) - v(s, t)}{h} ds \right) = \\ &= v(t, t) + \int_0^t \partial_t^+ v(s, t) ds. \end{aligned}$$

Ähnliches gilt auch für die linke Ableitung.

**Korollar 10.5** Sei  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Dann ist die Funktion

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)}{(4\pi t)^{n/2}} u_0(y) dy + \int_{s=0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right)}{(4\pi(t-s))^{n/2}} f(y, s) dy ds$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

## 10.4 Mittelwert und Maximum

Für harmonische Funktionen ist in Proposition 4.4 gezeigt, dass im Zentrum einer Kugel der Mittelwert über der Kugeloberfläche angenommen wird. Ein Ergebnis ähnlicher Art gilt für die Wärmeleitungsgleichung. Weil  $t$  und  $x$  sich nicht gleich verhalten, ist das Ergebnis komplizierter.

**Definition 10.6** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $r, t > 0$ . Wir definieren die „Wärmeleitungskugeln“  $W(x, t; r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  durch

$$W(x, t; r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; s < t \text{ und } (4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \right\}. \quad (10.12)$$

**Bemerkung 10.6.1** Sei  $p_n$  der Diffusionskern. Dann gilt:

$$(4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \Leftrightarrow p_n(x-y, t-s) > r^{-n}.$$

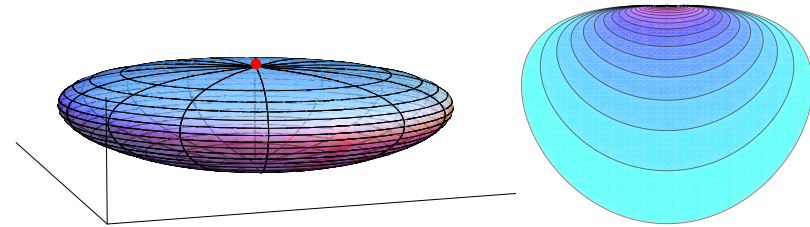


Abbildung 10.4: Links eine Wärmeleitungskugel  $W(x, t, r)$  in  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  mit dem Punkt  $(x, t)$  in rot. Rechts mehrere solcher Kugeln in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  bei festen  $x, t$  und verschiedene  $r$ .

**Bemerkung 10.6.2** Einige Eigenschaften von  $W(x, t; r)$ . In der Beschreibung nimmt man die  $x$ -Richtungen horizontal und  $t > 0$  zeigt nach oben.

- $\partial W(x, t; r) \in C^\infty$  für  $r > 0$ . Eine Wärmeleitungskugel ist ein konvexes Gebiet, bei dem  $(x, t)$  der höchste Punkt ist. Anders gesagt,  $(x, t)$  liegt in der Mitte oben auf  $W(x, t; r)$ .
- Für  $(y, s) \in W(x, t; r)$  gilt

$$t - \frac{1}{4\pi} r^2 < s < t \text{ und } |x - y| < c_n r$$



mit  $c_n = \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{n/2}$ . Das letztere folgt aus

$$\begin{aligned} |x - y|^n &= \\ \frac{1}{\pi^{n/2}} \left( \left( \frac{|x - y|^2}{4(t - s)} \right)^{n/2} e^{-\frac{|x - y|^2}{4(t - s)}} \right) (4\pi(t - s))^{n/2} e^{\frac{|x - y|^2}{4(t - s)}} \\ &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \left( \sup_{\alpha > 0} \alpha^{n/2} e^{-\alpha} \right) r^n = \left( \frac{n}{2\pi e} \right)^{n/2} r^n. \end{aligned}$$

• Weiter gilt

$$(y, s) \in W(x, t; c) \Leftrightarrow (ry, r^2s) \in W(rx, r^2t; rc).$$

**Lemma 10.7** Sei  $W(0, 0, r)$  wie in (10.12). Es gilt

$$\frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds = 1.$$

**Beweis.** Der Ausdruck hängt nicht von  $r$  ab, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds &= \frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,1)} \frac{|ry|^2}{4(r^2s)^2} r^n dy r^2 ds \\ &= \iint_{W(0,0,1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds. \end{aligned}$$

Wir substituieren  $\sigma = -s$  und  $y = 2\sqrt{\sigma}z$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} &\iint_{W(0,0,1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{\sigma=0}^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} \frac{4\sigma |z|^2}{4\sigma^2} (2\sqrt{\sigma})^n d\sigma dz \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{n+1}}{n} \left[ \sigma^{\frac{1}{2}n} \right]_0^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} |z|^2 dz \\ &= \frac{2\omega_n}{\pi^{n/2}n} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r^{n+1} dr \\ &= \frac{\omega_n}{\pi^{n/2}n} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^{n/2} dt = \frac{\omega_n}{\pi^{n/2}n} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $\omega_n$  der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  gilt nämlich  $\omega_n = n\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$ . ■

**Theorem 10.8 (Mittelwerteigenschaft für die Wärmeleitungsgleichung)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  ein Gebiet. Wenn die Funktion  $u \in C^2(U)$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \text{ auf } U \quad (10.13)$$

erfüllt, dann gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x,t,r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

für jede Wärmeleitungskugel  $W(x, t; r)$  mit  $\overline{W(x, t; r)} \subset U$ .

## 10.5 Beweis von Theorem 10.8

**Beweis.** Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $x = 0$  und  $t = 0$ . Wir betrachten

$$\phi(r) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0,0;r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0,0;1)} u(ry, r^2s) \frac{|ry|^2}{(r^2s)^2} r^{n+2} dy ds = \frac{1}{4} \iint_{W(0,0;1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{4} \iint_{W(0,0;1)} \left( y \cdot (\nabla u)(ry, r^2s) + 2rs (\partial_t u)(ry, r^2s) \right) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y,s) + \frac{|y|^2}{2s} (\partial_t u)(y,s) \right) dy ds = (*) \end{aligned}$$

Schreiben wir mit  $s < 0$

$$\psi(y, s; r) = \log(r^n p_n(y, -s)) = n \log r - \frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s},$$

so folgt

$$\nabla \psi(y, s; r) = \frac{y}{2s} \quad \text{und} \quad \partial_s \psi(y, s; r) = -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}. \quad (10.14)$$

Bemerkung 10.6.1 besagt, dass

$$\psi(y, s; r) = 0 \text{ auf } \partial W(0,0;r) \text{ und } \psi(y, s; r) > 0 \text{ in } W(0,0;r).$$

Wir finden, wenn wir (10.14)-links verwenden und nach  $y$ , nach  $s$  und wieder nach  $y$  partiell integrieren, dass

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y,s) + y \cdot \nabla \psi(y,s;r) \partial_s u(y,s) \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y,s) - \psi(y,s;r) (n \partial_s u(y,s) + y \cdot \nabla \partial_s u(y,s)) \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \left( \frac{|y|^2}{4s^2} + \partial_s \psi(y,s;r) \right) y \cdot \nabla u(y,s) - n \psi(y,s;r) \partial_s u(y,s) \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( -\frac{n}{2s} y \cdot \nabla u(y,s) - n \psi(y,s;r) \partial_s u(y,s) \right) dy ds = (**). \end{aligned}$$

Wenn wir die Differentialgleichung verwenden folgt

$$\begin{aligned}
 (**) &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( -\frac{n}{2s} y \cdot \nabla u(y,s) - n \psi(y,s;r) \Delta u(y,s) \right) dy ds = \\
 &= \frac{-n}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} (\nabla \psi(y,s;r) \cdot \nabla u(y,s) + \psi(y,s;r) \Delta u(y,s)) dy ds = \frac{-n}{r^{n+1}} \iint_{\partial W(0,0;r)} \psi(y,s;r) \nabla u(y,s) \cdot \nu_{y,s} d\sigma_{y,s} = 0.
 \end{aligned}$$

Hier ist  $\nu_{y,s}$  der auswärtige Normalenvektor auf  $W(0,0;r)$ . Also gilt

$$\phi(r) = \lim_{\rho \downarrow 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{4\rho^n} \iint_{W(0,0;\rho)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = u(0,0)$$

wegen der Stetigkeit von  $u$ . ■

**Bemerkung 10.8.1** Wenn man statt (10.13) die inhomogene Gleichung

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \text{ auf } U \tag{10.15}$$

anschaut mit  $f(x,t) \geq 0$  auf  $U$ , dann folgt im Beweis oben bei (\*\*) eine Ungleichung und via  $\phi'(r) \leq 0$  schließlich

$$u(x,t) \geq \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds.$$

**Aufgabe 10.4** Beweisen Sie diese letzte Bemerkung im Detail.

## 10.6 Maximumprinzip und Eindeutigkeit

Für harmonische Funktionen folgt aus Korollar 4.5, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum nur auf dem Rand annehmen kann. Auch für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gilt ein ähnliches Ergebnis.

**Definition 10.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man definiert den parabolischen Rand von  $\Omega \times (0, T)$  durch

$$\partial_P(\Omega \times (0, T)) = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

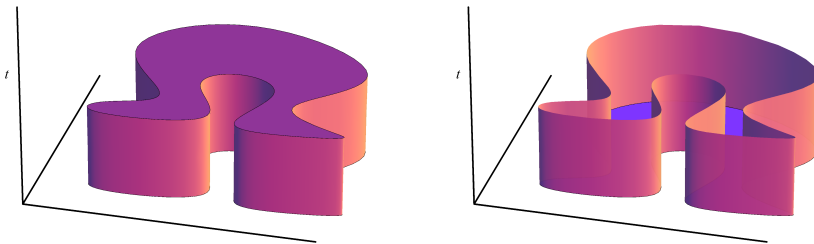


Abbildung 10.5:  $\Omega \times (0, T)$  und sein parabolischer Rand  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$

**Theorem 10.10 (Das starke Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \times (0, T). \quad (10.16)$$

Dann gilt:

1. Das Maximum wird auf dem parabolischen Rand angenommen:

$$\begin{aligned} \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\} \\ = \max \{u(x, t); (x, t) \in \partial_P(\Omega \times (0, T))\}. \end{aligned}$$

2. Wenn das Maximum in  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  angenommen wird, also

$$u(x_0, t_0) = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\},$$

dann ist  $u$  konstant auf  $\bar{\Omega} \times [0, t_0]$ .

**Bemerkung 10.10.1** Wenn  $u$  eine Lösung von (10.16) ist, dann löst auch  $-u$  diese Gleichung. Das bedeutet, dass man in Theorem 10.10 statt Maximum auch Minimum lesen kann.

**Bemerkung 10.10.2** Betrachtet man die inhomogene Version von (10.16), also

$$\partial_t u - \Delta u = f \text{ auf } \Omega \times (0, T). \quad (10.17)$$

und die Funktion  $f$  hat ein Vorzeichen, dann folgt:

- Wenn  $f \geq 0$ , dann nimmt  $u$  sein Minimum an auf dem parabolischen Rand.
- Wenn  $f \leq 0$ , dann nimmt  $u$  sein Maximum an auf dem parabolischen Rand.

Für einen Beweis verwendet man Bemerkung 10.8.1.

**Bemerkung 10.10.3** *Im Fall, dass  $f$  eine strikte Ungleichung erfüllt, kann man das Ergebnis sehr leicht bekommen. Nehme an, dass  $u$  in  $(x^*, t^*) \in \Omega \times (0, T)$  ein Maximum hat und dass  $f(x^*, t^*) < 0$  gilt. Weil es ein inneres Maximum ist, folgt  $u_t(x^*, t^*) = 0$  und  $-u_{x_i x_i}(x^*, t^*) \geq 0$ . Dann findet man, dass*

$$0 > f(x^*, t^*) = \partial_t u(x^*, t^*) - \Delta u(x^*, t^*) \geq 0$$

und dies ist ein Widerspruch. Wenn für  $x^* \in \Omega$  und  $t^* = T$  das Maximum angenommen wird, so folgt  $u_t(x^*, t^*) \geq 0$  und  $-u_{x_i x_i}(x^*, t^*) \geq 0$  für alle  $i$ , ebenfalls ein Widerspruch.

**Beweis.** Wir setzen  $M = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\}$  und nehmen an, dass es  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  gibt, mit  $u(x_0, t_0) = M$ .

Dann gilt für jede Wärmeleitungskugel  $W(x_0, t_0; r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$ , dass

$$\begin{aligned} M = u(x_0, t_0) &= \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0; r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \\ &\leq \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0; r)} M \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds = M. \end{aligned}$$

Gleichheit tritt hier nur auf, wenn  $u(y, s) = M$  für alle  $(y, s) \in W(x_0, t_0; r)$ . Wir können  $r$  so groß nehmen, dass  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$  von  $W(x_0, t_0; r)$  berührt wird. In dieser Berührungsstelle  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  gilt  $u(\tilde{x}, \tilde{t}) = M$  und die erste Aussage ist bewiesen.

Für die zweite Behauptung nehmen wir an, dass es  $(x_*, t_*) \in \bar{\Omega} \times [0, t_0]$  gibt mit  $u(x_*, t_*) < M$ . Sei  $x(\cdot) : [t_*, t_0] \rightarrow \Omega$  eine Kurve, die  $x_*$  mit  $x_0$  verbindet. Dann verbindet  $t \mapsto (x(t), t)$  den Punkt  $(x_*, t_*)$  mit  $(x_0, t_0)$  und bei wachsendem  $t$ . Setze

$$t_1 = \sup \{t \in [t_*, t_0]; u(x(t), t) < M\}. \quad (10.18)$$

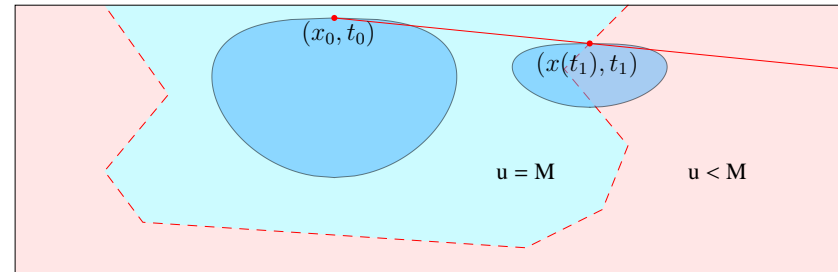


Abbildung 10.6: Die Verwendung von Wärmeleitungskugeln für den Widerspruch beim Beweis des Maximumprinzips

Es gibt  $W(x(t_1), t_1; r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$  mit  $r > 0$  und  $\varepsilon > 0$  derart, dass  $(x(t), t) \in W(x(t_1), t_1; r)$  für  $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$ . Weil  $u(x(t_1), t_1) = M$  gilt, folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass  $u(x, t) = M$  auf  $W(x(t_1), t_1; r)$  und dies ist ein Widerspruch zu (10.18). ■

**Korollar 10.11 (Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten)**

Sei  $\Omega$  ein offenes und beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $T > 0$ . Das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

hat höchstens eine Lösung

$$u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T]).$$

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  gibt, wendet man Theorem 10.10 an auf  $w = u_1 - u_2$  und auf  $-w$  für jede Zusammenhangskomponente von  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ . ■

**Aufgabe 10.5** Meistens betrachte man die Wärmeleitungsgleichung auf einem festen Gebiet  $\Omega$ . In bestimmten Fällen, zum Beispiel, wenn  $\Omega$  ein Eisklumpen im Wasser ist, dann kann das Gebiet von der Zeit abhängen. In den Formulierungen haben wir dies nicht zugelassen um die Notation nicht zu überlasten. Wir betrachten einen solchen Fall.

Sei

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + (t-1)^2 < 5\}$$

und

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \Omega(t) \text{ und } 0 < t < 3, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } |x| \leq 2. \end{cases}$$

Beschreiben Sie, an welchen Stellen eine stetige Lösung  $u(x,t)$  ihr Maximum annehmen kann, und begründen Sie Ihre Antwort.

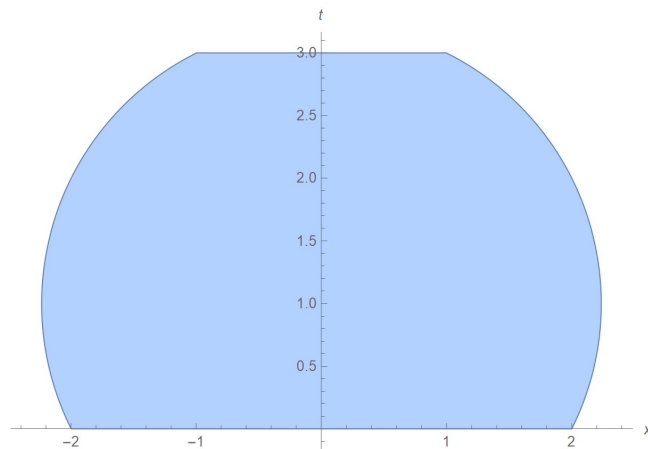


Abbildung 10.7: Das  $t$ -abhängige Gebiet aus Aufgabe 10.5