Partielle Differentialgleichungen Woche 11

Die Wärmeleitungsgleichung II

11.1 Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung

Theorem 11.1 (Ein starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ unter einer Wachstumsbedingung) *Sei $T > 0$ und sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T),$$

die die folgende Bedingung erfüllt:

- *Es gibt C & A in $\mathbb{R}^+$ derart, dass für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ gilt: $u(x,t) \leq Ce^{A|x|^2}$.*

Wenn $M := \sup\{u(x,0); x \in \mathbb{R}^n\} \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\sup\{u(x,t); (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]\} = M. \tag{11.1}$$

Beweis. Nehme an, dass es $(y,t_1) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ gibt mit

$$u(y,t_1) > M = \sup\{u(x,0); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir fangen an mit dem Fall, dass t_1 so klein ist, dass $4At_1 < 1$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $4A(t_1+\varepsilon) < 1$. Man definiere für $\delta > 0$ die Funktion

$$v_\delta(x,t) = u(x,t) - \frac{\delta}{(t_1+\varepsilon-t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(t_1+\varepsilon-t)}\right)$$

und man nehme δ so klein, dass

$$v_\delta(y,t_1) = u(y,t_1) - \frac{\delta}{\varepsilon^{n/2}} > M.$$

Es gilt $(\partial_t - \Delta) v_\delta(x,t) = 0$ für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t_1+\varepsilon)$. Nehme $\Omega_r = B_r(y)$.

Wir haben

$$v_\delta(x,0) \leq u(x,0) \leq M \text{ für } x \in \Omega_r,$$

und für $(x,t) \in \partial\Omega_r \times (0,t_1)$ gilt

$$v_\delta(x,t) = u(x,t) - \frac{\delta}{(t_1+\varepsilon-t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(t_1+\varepsilon-t)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\le C\exp\left(A\left|x\right|^2\right) - \frac{\delta}{\left(t_1+\varepsilon-t\right)^{n/2}}\exp\left(\frac{r^2}{4\left(t_1+\varepsilon-t\right)}\right)\\
&\le C\exp\left(A\left(\left|y\right|+r\right)^2\right) - \frac{\delta}{\left(t_1+\varepsilon\right)^{n/2}}\exp\left(\frac{1}{4\left(t_1+\varepsilon\right)}r^2\right).
\end{aligned}$$

Weil $A < \frac{1}{4(t_1+\varepsilon)}$, folgt $v_\delta\left(x,t\right) \to -\infty$ für $\left(x,t\right) \in \partial B_r\left(y\right) \times (0,t_1)$, wenn $r \to \infty$. Wir können dann r derart groß nehmen, dass

$$v_\delta\left(x,t\right) \le M \text{ für } x \in \partial\Omega_r.$$

Mit Theorem 10.10 gilt

$$\begin{gathered}
M < \sup\left\{v_\delta\left(x,t\right);\ \left(x,t\right) \in \Omega_r \times \left(0,t_1\right)\right\} = \\
\sup\left\{v_\delta\left(x,t\right);\ \left(x,t\right) \in \partial_P\left(\Omega_r \times \left(0,t_1\right)\right)\right\} \le M,
\end{gathered}$$

ein Widerspruch.

Wenn die Annahme $4At_1 < 1$ nicht erfüllt ist, teilt man das Intervall $\left(0,t_1\right)$ auf in kleinere Intervalle und zeigt das Maximumprinzip nacheinander auf $\left(0,\frac{1}{n}t_1\right)$, $\left(\frac{1}{n}t_1,\frac{2}{n}t_1\right)$, und so weiter. ■

Aufgabe 11.1 *Betrachte die Funktion*

$$u(x,t) := \tfrac{x}{\sqrt{t^3}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. *Zeigen Sie, dass* $u_t - u_{xx} = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $t > 0$.
2. *Zeigen Sie, dass* $\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Erfüllt diese Funktion die Bedingung in Theorem 11.1?*

Korollar 11.2 (Eindeutigkeit auf $\mathbb{R}^n$ bei einer Wachstumsbedingung) *Sei $T > 0$. Betrachte das Randwertproblem*

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \Delta\right)u\left(x,t\right) = f\left(x,t\right) & \text{für } \left(x,t\right) \in \mathbb{R}^n \times \left(0,T\right), \\ u\left(x,0\right) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{11.2}$$

mit der folgenden Wachstumsbedingung:

- *Es gibt C & A derart, dass für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$:*

$$\left|u\left(x,t\right)\right| \le Ce^{A\left|x\right|^2}. \tag{11.3}$$

Dann gilt, dass höchstens eine Funktion

$$u \in C^2\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^n \times [0,T]\right)$$

existiert, die sowohl (11.2) als auch (11.3) erfüllt.

Beweis. Man wende Theorem 11.1 an auf die Differenz zweier Lösungen. ■

11.2 Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion

Die Eindeutigkeit für das Anfangs-Randwertproblem lässt sich bei beschränkten Gebieten Ω mit $\partial\Omega \in C^1$ einfacher zeigen. Wenn u_1 und u_2 Lösungen in $C^2\left(\bar\Omega \times (0,T]\right) \cap C\left(\bar\Omega \times [0,T]\right)$ sind von

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \Delta\right)u\left(x,t\right) = f\left(x,t\right) \text{ für } \left(x,t\right) \in \Omega \times \left(0,T\right), \\ u\left(x,t\right) = \varphi\left(x,t\right) \text{ für } \left(x,t\right) \in \partial\Omega \times \left(0,T\right), \end{cases} \tag{11.4}$$

definiert man für $w = u_1 - u_2$ die *Energiefunktion* E durch

$$E(t) = \int_\Omega w\,(x,t)^2\,dx. \tag{11.5}$$

Lemma 11.3 *Sei Ω, u_1, u_2, w und E wie oben. Dann gilt $E'(t) \leq 0$.*

Korollar 11.4 *Sei Ω beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$ und sei $u_0 \in C\left(\bar{\Omega}\right)$. Dann hat (11.4) mit $u\,(x,0) = u_0\,(x)$ höchstens eine Lösung in $C^2\left(\bar{\Omega} \times (0,T]\right) \cap C\left(\bar{\Omega} \times [0,T]\right)$.*

Beweis. Man findet, dass

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_\Omega 2w\,(x,t)\ \partial_t w\,(x,t)\ dx \\
&= \int_\Omega 2w\,(x,t)\ \Delta w\,(x,t)\ dx \\
&= 2\int_{\partial\Omega} w\,(x,t)\,\frac{\partial}{\partial n} w\,(x,t)\,dx - 2\int_\Omega \left|\nabla w\,(x,t)\right|^2 dx \\
&= -2\int_\Omega \left|\nabla w\,(x,t)\right|^2 dx \leq 0.
\end{aligned}$$

Wir haben die Differentialgleichung und partielle Integration verwendet, und außerdem dass $w\,(x,t) = 0$ für $x \in \partial\Omega$. Das Lemma ist so bewiesen.

Für das Korollar bemerkt man, dass aus der Definition folgt, dass $E\,(t) \geq 0$. Also wenn $E\,(0) = 0$ gilt, dann folgt, dass $E\,(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Weil $w\,(x,0) = 0$, hat man $E\,(0) = 0$ und so findet man

$$0 \leq E(t) \leq E\,(0) = 0.$$

Wenn $E\,(t) = 0$ folgt $w\,(x,t) = 0$ und die Eindeutigkeit. ■

Diese Energiefunktion E können wir auch verwenden, um Eindeutigkeit der Anfangswerte zu zeigen. Dieses Problem ist wesentlich anders, denn eine Lösung rückwärts zu finden, ist im Allgemeinen nicht möglich. Wir bekommen hier also keine Existenz, sondern nur Eindeutigkeit.

Theorem 11.5 (Klassische Lösungen sind auch rückwärts eindeutig) *Wir betrachten (11.4) mit f und φ gegeben und u_0 unbekannt. Das Gebiet Ω sei beschränkt und $\partial\Omega \in C^1$. Wenn $u_1, u_2 \in C^2\left(\bar{\Omega} \times [0,T]\right)$ Lösungen von*

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\,u\,(x,t) = f\,(x,t) & \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,T)\,, \\ u\,(x,t) = \varphi\,(x,t) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)\,, \end{cases} \tag{11.6}$$

sind (ohne u_0 vorzuschreiben!) und

$$u_1\,(x,T) = u_2\,(x,T) \ \text{ für } x \in \bar{\Omega},$$

dann gilt $u_1 = u_2$ auf $\bar{\Omega} \times [0,T]$.

Beweis. Wir betrachten $E\,(t)$ aus (11.5). Es gilt

$$\begin{aligned}
E''(t) &= -4\int_\Omega \nabla w\,(x,t) \cdot \nabla\partial_t w\,(x,t)\ dx = \\
&= 4\int_\Omega \Delta w\,(x,t)\ \partial_t w\,(x,t)\ dx = 4\int_\Omega \left|\Delta w\,(x,t)\right|^2\ dx.
\end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet, dass $w\,(x,t) = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,T]$ und daher auch $\partial_t w\,(x,t) = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,T]$. Mit

Cauchy[1]-Schwarz[2] gilt dann, dass

$$E'(t) = 2\int_\Omega w(x,t)\ \Delta w(x,t)\ dx$$
$$\leq 2\left(\int_\Omega w(x,t)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(\int_\Omega \Delta w(x,t)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

anders gesagt, dass

$$E'(t)^2 \leq E(t)E''(t).$$

Wegen unserer Annahme gilt $E(T)=0$. Wenn $E(t)=0$ auf $[0,T]$ wären wir fertig. Nehmen wir also an, es gibt ein Intervall $[t_1,t_2] \subset [0,T]$ mit $E(t)>0$ für $t \in [t_1,t_2)$ und $E(t_2)=0$. Weil $E(t)>0$ auf diesem Intervall gilt, ist $\log(E(t))$ wohldefiniert. Es folgt, dass

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \log(E(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{E'(t)}{E(t)}\right) = \frac{E''(t)E(t)-E'(t)^2}{E(t)^2} \geq 0.$$

Dann ist $t \mapsto \log(E(t))$ convex auf $[t_1,t_2)$ und für $t \in [t_1,t_2)$ gilt

$$\log(E((1-s)t_1+st)) \leq$$
$$(1-s)\log(E(t_1)) + s\log(E(t)) \ \text{ für } s\in[0,1].$$

Anders geschrieben wird dies

$$E((1-s)t_1+st) \leq E(t_1)^{1-s}\,E(t)^s \ \text{ für } s\in[0,1],$$

[1] Augustin-Louis Cauchy, Paris 1789 – Sceaux 1857
[2] Karl Hermann Amandus Schwarz, Hermsdorf 1843 – Berlin 1921

und weil E stetig ist, folgt

$$E((1-s)t_1+st_2) \leq E(t_1)^{1-s}\,E(t_2)^s = 0 \text{ für } s\in(0,1].$$

So findet man $E(t)=0$ für $t\in(t_1,t_2]$ und das widerspricht der Annahme. ■

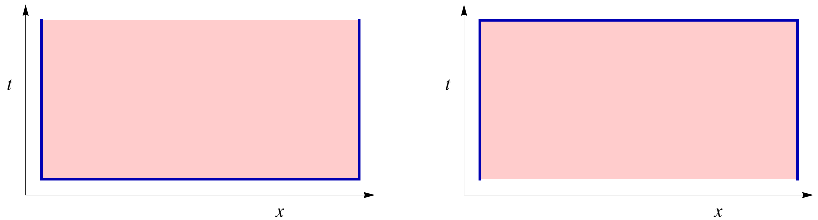


Abbildung 11.1: Schematische Darstellung vorgeschriebener Randwerte bei der Wärmeleitungsgleichung. Obwohl die Eindeutigkeit für beide Fälle gilt, heißt das noch nicht, dass beide Randwertprobleme wohldefiniert sind im Sinne von Hadamard. Mit Anfangswert $u(x,0)=u_0(x)$ und $u_0\in C(\overline{\Omega})$ kann man Existenz und Robustheit zeigen. Für $u(x,T)=u_1(x)$ und $u_1\in C(\overline{\Omega})$ gilt dies nicht.

Aufgabe 11.2 *Wir betrachten*

$$(\partial_t - \Delta)\,u(x,t) = f(x,t) \text{ für } x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0,T).$$

Zeigen Sie, dass wenn $u_1,u_2\in C_b^2(\mathbb{R}^n\times[0,T])$ Lösungen sind mit für irgendein $M>0$ und für alle $t\in[0,T]$:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\left\|\nabla^2 u(\cdot,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

und $u_1(\cdot,T)=u_2(\cdot,T)$, dann gilt

$$u_1(\cdot,t) = u_2(\cdot,t) \ \text{ für alle } t\in[0,T].$$

11.3 Regularität

Wir haben gesehen, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ (mit $f=0$) unendlich oft differenzierbar ist, sogar wenn $x \mapsto u(x,0)$ nur stetig ist. Dies gilt auch für die Wärmeleitungsgleichung in $\Omega \times (0,T)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Obwohl wir keine explizite Lösung zur Verfügung haben und sogar noch nicht einmal die Existenz einer Lösung gezeigt haben, können wir doch diese Regularität zeigen.

Theorem 11.6 *Sei* $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C\left(\bar\Omega \times [0,T]\right)$ *eine Lösung von (11.4) mit* $f(x,t)=0$. *Dann gilt*

$$u \in C^\infty(\Omega \times (0,T)).$$

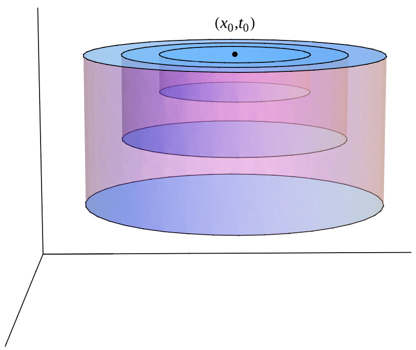


Abbildung 11.2: Die Zylinder $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3$ aus dem Beweis zu Theorem 11.6.

Beweis. Sei $(x_0,t_0) \in \Omega \times (0,T)$. Wir definieren die Zylinder

$$Z(x_0,t_0,r) = \left\{(x,t)\,;\,|x-x_0|<r \text{ und } t_0-r^2<t<t_0\right\}$$

und betrachten

$$Z_1 = Z(x_0,t_0,r_0),\ Z_2 = Z\left(x_0,t_0,\tfrac{3}{4}r_0\right),\ Z_3 = Z\left(x_0,t_0,\tfrac{1}{2}r_0\right).$$

Nehme an, dass $r_0>0$ so ist, dass $Z(x_0,t_0,r_0) \subset \Omega \times (0,T)$. Wir zeigen die Regularität innerhalb Z_3.

Sei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ so definiert, dass

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x,t) \in Z_2, \\ \dots & \text{für } (x,t) \in Z_1 \setminus Z_2, \\ 0 & \text{für } (x,t) \notin Z_1, \end{cases} \tag{11.7}$$

und definiere

$$v(x,t) = \begin{cases} \chi(x,t)\,u(x,t) & \text{für } (x,t) \in Z_1, \\ 0 & \text{für } (x,t) \notin Z_1. \end{cases}$$

Bemerke, dass $v \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ gilt, dass

$$v(x,0) = 0 \tag{11.8}$$

und außerdem, dass

$$\begin{aligned} &(\partial_t - \Delta)\,v(x,t) = \\ &\qquad ((\partial_t - \Delta)\,\chi(x,t))\,u(x,t) - 2\nabla\chi(x,t)\cdot\nabla u(x,t) \\ &\qquad =: \tilde f(x,t) \end{aligned} \tag{11.9}$$

Weil $\chi(x,t)=1$ auf Z_2 und $\chi(x,t)=0$ auf Z_1 gilt, folgt

$$\tilde f(x,t) = 0 \text{ für } (x,t) \in Z_2 \cup Z_1^c$$

und es gilt, dass $\tilde f \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Mit Duhamel findet man eine Lösung von (11.8-11.9) und weil diese beschränkte

Lösung eindeutig ist wegen Theorem 11.2, folgt

$$v(x,t) = \iint_{(y,s)\in Z_1\setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y,s)\,dyds.$$

Für $(x,t)\in Z_3$ gilt $\chi(x,t)=1$ und also auch für $(x,t)\in Z_3$

$$u(x,t) = \iint_{(y,s)\in Z_1\setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y,s)\,dyds.$$

Es sei bemerkt, dass $(x,t)\in Z_3$ und $(y,s)\in Z_1\setminus Z_2$ bedeutet, dass man der singulären Stelle im Integral, nämlich $(y,s)=(x,t)$, fern bleibt. Es gilt also, dass

$$(x,t)\mapsto \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \in C^\infty(Z_3).$$

Mit dem Satz zu Majorisierter Konvergenz lässt sich Differenzieren und Integrieren vertauschen und es folgt, dass auch $u\in C^\infty(Z_3)$. ■

Aufgabe 11.3 *Die Funktion χ ist konstant 1 auf Z_2 und konstant 0 außerhalb von Z_1. Wieso braucht man im Beweis noch Z_3 innerhalb von Z_2?*

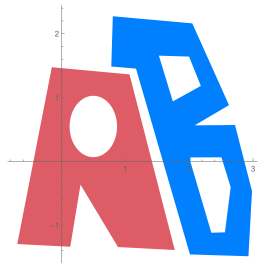
11.4 Technisches Intermezzo

In (11.7) wurde eine C^∞-Funktion verwendet, die außerhalb Z_1 identisch 0 ist und innerhalb Z_2 identisch 1. Die Mengen waren derartig, dass das Komplement von Z_1 eine positive Entfernung zu Z_2 hat:

$$d(Z_1^c, Z_2) := \inf\{|(x,s)-(y,t)|\,;(x,s)\notin Z_1 \text{ und } (y,t)\in Z_2\}.$$

Wie bekommt man eine solche Funktion?

Um einmal genau diese vollkommen technische Aufgabe zu klären, finden Sie hier die Details.



Lemma 11.7 *Seien $A,B\subset\mathbb{R}^m$ mit*

$$\delta := \inf\{|x-y|\,;x\in A \text{ und } y\in B\} > 0.$$

Dann existiert eine Funktion $\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ derart, dass

1. *$0\le\chi(x)\le 1$ für alle $x\in\mathbb{R}^m$;*
2. *$\chi(x)=1$ für alle $x\in A$;*
3. *$\chi(x)=0$ für alle $x\in B$.*

Beweis. Wir erinnern uns an den Friedrichsschen Glätter $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$:

$$\varphi_\varepsilon(x) = c_m\varepsilon^{-m}\varphi(|x|/\varepsilon)$$

mit

$$\varphi(r) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{r^2-1}\right) & \text{für } r<1 \\ 0 & \text{für } r\ge 1 \end{cases}$$

und

$$c_m = \left(\int_{x\in\mathbb{R}^m} \varphi\left(|x|\right) dx \right)^{-1}.$$

Die Funktion φ_ε hat $\overline{B_\varepsilon\left(0\right)}$ als Träger und

$$\int_{x\in B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon\left(x\right) dx = 1.$$

Man definiert die Entfernung einer Stelle $x \in \mathbb{R}^m$ zu A durch

$$d\left(x, A\right) := \inf\left\{|x-y| ; y\in A\right\}.$$

Weil $d\left(\tilde{x}, A\right) \leq d\left(x, A\right) + |x-\tilde{x}|$ gilt, ist diese Funktion stetig auf $\mathbb{R}^m$. Dann folgt, dass

$$A_{\delta/2} := \left\{x\in\mathbb{R}^m; d\left(x, A\right) < \delta/2\right\}$$

eine offene Menge ist, die A umfasst und noch mindestens $\delta/2$ von B entfernt ist. Weil $A_{\delta/2}$ offen ist, ist $\chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi\left(x\right) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}\left(x-y\right) dy \tag{11.10}$$

wohldefiniert. Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften:

Weil $\varphi_{\delta/2} \geq 0$ gilt, folgt

$$0 \leq \chi\left(x\right) \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{\delta/2}\left(x-y\right) dy = 1.$$

Das Theorem zu majorisierter Konvergenz impliziert

$$\begin{aligned}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\left(x\right) &= \lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{\delta/2}\left(x+he_i-y\right)-\varphi_{\delta/2}\left(x-y\right)}{h} dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{h\to0} \frac{\varphi_{\delta/2}\left(x+he_i-y\right)-\varphi_{\delta/2}\left(x-y\right)}{h} dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial\varphi_{\delta/2}}{\partial x_i}\left(x-y\right) dy\end{aligned}$$

und durch wiederholte Anwendung folgt $\chi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$.

Weil der Träger von $y \mapsto \varphi_{\delta/2}\left(x-y\right)$ genau $\overline{B_{\delta/2}\left(x\right)}$ ist und für $x\in A$ gilt, dass $B_{\delta/2}\left(x\right) \subset A_{\delta/2}$, folgt weiter, dass für $x \in A$ gilt:

$$\chi\left(x\right) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}\left(x-y\right) dy = \int_{B_{\delta/2}(x)} \varphi_{\delta/2}\left(x-y\right) dy = 1.$$

Für $x \in B$ folgt $B_{\delta/2}\left(x\right) \cap A_{\delta/2} = \emptyset$ und man findet für $x \in B$:

$$\chi\left(x\right) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_\varepsilon\left(x-y\right) dy = \int_\emptyset \varphi_\varepsilon\left(x-y\right) dy = 0.$$

■

11.5 Existenz auf beschränkten Gebieten

Wir werden hier skizzieren, wie man die Existenz einer Lösung zu

$$\begin{cases} \left(\partial_t - \Delta\right) u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right) \in \Omega\times\left(0,T\right),\\ u\left(x,0\right) = u_0(x) & \text{für } x\in\Omega,\\ u\left(x,t\right) = 0 & \text{für } \left(x,t\right)\in\partial\Omega\times\left(0,T\right),\end{cases} \tag{11.11}$$

bekommen kann. Man versucht Lösungen zu finden für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\, u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,T)\,, \\ u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)\,, \end{cases} \tag{11.12}$$

die man wie folgt schreiben kann:

$$u\,(x,t) = X(x)T(t). \tag{11.13}$$

Für eine solche Lösung gilt

$$X(x)T'(t) - \Delta X(x)T(t) = 0$$

und wenn u nicht trivial ist, findet man

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)}.$$

Das bedeutet wiederum, dass

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = c.$$

Man findet eine passende Funktion u wie in dem *Separationsansatz* (11.13), wenn man eine Lösung hat vom zugehörigen Eigenwertproblem.

Definition 11.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet. Man nennt*

$$\begin{cases} -\Delta X\,(x) = \lambda X\,(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{11.14}$$

wo sowohl die Funktion $X \in C^2\,(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, als auch die Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gesucht wird, ein Eigenwertproblem. *Für ein Paar (X,λ), das dieses Problem erfüllt, nennt man X eine* Eigenfunktion *und λ den zugehörigen* Eigenwert.

Bemerkung 11.8.1 *Meistens reicht es, wenn die Eigenfunktion nur im schwachen Sinne das Eigenwertproblem (11.14) erfüllt. Das heißt, man sucht $X \in W_0^{1,2}(\Omega)$ derart, dass*

$$\int_\Omega \nabla X(x) \cdot \nabla\varphi(x) - \lambda X(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn das Gebiet keinen glatten Rand hat kann es sein, dass es nur schwache Lösungen gibt.

Definition 11.9 *Der Raum $W_0^{1,2}\,(\Omega)$ ist definiert als der Abschluss von $C_0^\infty\,(\Omega)$ in der $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$-Norm:*

$$W_0^{1,2}\,(\Omega) := \overline{C_0^\infty\,(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}} \text{ mit}$$
$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla f|\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Bemerkung 11.9.1 *Man hat $C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0\left(\overline{\Omega}\right) \subset W_0^{1,2}\,(\Omega)$. Wenn Ω mehrdimensional ist, sind Funktionen in $W_0^{1,2}\,(\Omega)$ im Allgemeinen nicht mal stetig.*

Aufgabe 11.4 *Sei*

$$\Omega = \left\{(x_1,x_2) \in B_1(0); |\mathrm{Arg}\,(x_1 + ix_2)| < \tfrac{9}{10}\pi\right\}$$

und $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u\,(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r^{5/9}\left(1 - r^4\right)\cos\left(\tfrac{5}{9}\varphi\right).$$

1. *Zeigen Sie, dass $u \notin C^1(\overline{\Omega})$.*
2. *Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,2}\,(\Omega)$.*

3. *Berechnen Sie Δu für $x \in \Omega$ und definieren Sie $v \in C(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u = v$ in Ω.*

4. *Zeigen Sie, dass es $v \in C^1(\overline{\Omega})$.*

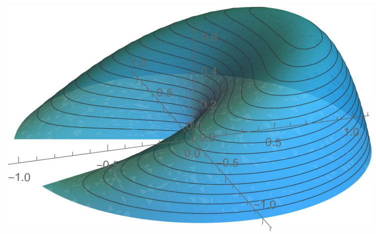


Abbildung 11.3: Skizze der Funktion aus Aufgabe 11.4

Wie bei Eigenvektoren kann man auch eine Eigenfunktion mit einer Zahl multiplizieren und es bleibt eine Eigenfunktion mit dem gleichen Eigenwert. Es ist auch hier üblich, diese (abhängigen) Eigenfunktionen als eine Eigenfunktion zu benennen.

Beispiel 11.10 *Das Eigenwertproblem*

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) & \text{für } 0 < x < 1, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \{0,1\}, \end{cases}$$

hat als Lösungen $\{(X_k, \lambda_k)\,;\ k \in \mathbb{N}^+\}$ mit

$$X_k(x) = \sin(k\pi x) \text{ und } \lambda_k = k^2\pi^2.$$

Man kann folgendes zeigen: $\left\{\sqrt{2}X_k;\ k \in \mathbb{N}^+\right\}$ ist ein vollständiges orthonormales System *in $L^2(0,1)$. Orthonormal in $L^2(0,1)$ bedeutet*

$$\left\langle \sqrt{2}X_k, \sqrt{2}X_\ell \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell, \\ 0 & \text{für } k \neq \ell, \end{cases}$$

für $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Vollständig bedeutet, dass es für jede $u_0 \in L^2(0,1)$ eine Approximation im $L^2(0,1)$-Sinne gibt:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^n \left\langle \sqrt{2}X_k, u_0 \right\rangle \sqrt{2}X_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

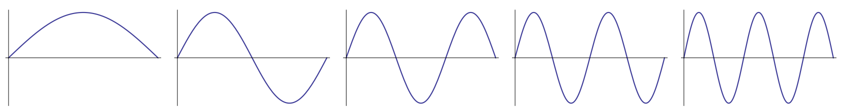


Abbildung 11.4: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 11.10

Wenn X_k eine Eigenfunktion mit Eigenwert λ_k für (11.14) ist, dann hat man auch eine Lösung von (11.11) mit $u(x,0) = X_k(x)$, nämlich

$$u(x,t) = e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned} &(\partial_t - \Delta)\, u(x,t) = -\lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) + \lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) = 0, \\ &u(x,0) = e^{-\lambda_k 0} X_k(x) = X_k(x), \\ &u(x,t)_{|x\in\{0,1\}} = e^{-\lambda_k t} X_k(x)_{|x\in\{0,1\}} = 0. \end{aligned}$$

Für $u(x,0) = \sum_{k=1}^n c_k X_k(t)$ findet man als Lösung dieser linearen Differentialgleichung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Ohne Beweis beschreiben wir, wie man allgemeine Anfangswerte mit einem solchen Ansatz angehen kann.

Behauptung 11.11 *Ist folgendes erfüllt:*

1. *$\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein vollständiges orthonormales System von Eigenfunktionen in $L^2(\Omega)$, die (11.14) im schwachen Sinne erfüllen;*
2. *$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hat höchstens endlich viele negative Eigenwerte;*
3. *$u_0 \in L^2(\Omega)$,*

dann gilt:

- *Die Funktion $u(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ ist für $t \geq 0$ wohldefiniert durch*
$$u(x,t) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t} \langle X_k, u_0\rangle X_k(x);$$
- $t \mapsto u(\cdot,t) \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$;
- $\lim_{t\downarrow 0} \|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^2(0,1)} = 0$;

Wenn zusätzlich gilt, dass $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dann folgt

- $t \mapsto u(\cdot,t) \in L^\infty\left((0,T); W_0^{1,2}(\Omega)\right)$;
- *u ist eine schwache Lösung der Differentialgleichung $(\partial_t - \Delta)u = 0$.*

  Das bedeutet, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$ gilt
$$\int_0^T \int_\Omega (u(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t) - \nabla u(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t))\,dxdt = 0.$$

Ohne nähere Bedingungen am Rand $\partial\Omega$, wie zum Beispiel $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$, kann man nicht die Existenz einer klassischen Lösung zeigen. Auch wenn $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ kann es sein, dass $u(\cdot,t)$ für $t > 0$ nicht stetig bis auf $\partial\Omega$ ist. Im Inneren von $\Omega \times (0,T)$ wird die Lösung wie vorher unendlich oft differenzierbar sein.

Einen Separationsansatz, der zu explizit berechenbaren Lösungsformeln führt, gibt es meistens nur, wenn genügend Symmetrie vorhanden ist und man keine wilden Randwerte hat. Für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{11.15}$$

findet man so eigentlich nur eine Lösung, wenn Ω ein Rechteck, Quader, Kreis, Halbkreis, Kugel usw. ist.

Beispiel 11.12 *Für ein Rechteck Ω, sagen wir $\Omega = (0,a) \times (0,b)$, braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{11.16}$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind

$$\lambda_{k,\ell} = \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2}\right)\pi^2,$$
$$\varphi_{k,\ell}(x_1,x_2) = \frac{2}{ab}\sin\left(k\frac{\pi}{a}x_1\right)\sin\left(\ell\frac{\pi}{b}x_2\right),$$

und $\{\varphi_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^\infty$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(\Omega)$. Für $u_0 \in L^2(\Omega)$ kann man die Lösung zu (11.15) wie folgt schreiben:

$$u(x,t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_{k\ell}\rangle e^{-\lambda_{k\ell}t}\varphi_{k\ell}(x)$$

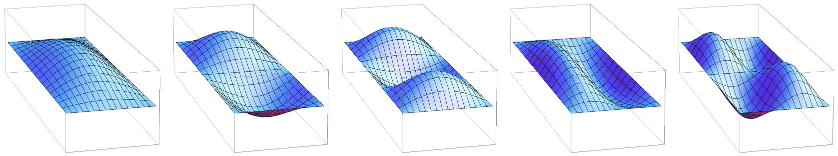


Abbildung 11.5: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 11.12.

Beispiel 11.13 *Für einen Kreis Ω, sagen wir $\Omega = B_1(0)$, braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu (11.16), die man mit einem zweiten Separationsansatz, nämlich*

$$\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = R(r)\,\Theta(\theta),$$

via

$$-r^{-1}(rR'(r))'\,\Theta(\theta) - r^{-2}R(r)\,\Theta''(\theta) = \lambda R(r)\,\Theta(\theta)$$

überführt in

$$\begin{cases} -r^{-1}(rR'(r))' = \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R(r) & \text{für } r \in (0,1), \\ R(1) = R'(0) = 0, \end{cases} \tag{11.17}$$

und

$$\begin{cases} -\Theta''(\theta) = \mu\,\Theta(\theta) & \text{für } \theta \in (0,2\pi), \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \end{cases} \tag{11.18}$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen für (11.18) sind

$$\begin{aligned} \mu_n &= n^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,0}(\theta) &= \cos(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,1}(\theta) &= \sin(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Besselfunktionen und ihrer Nullstellen findet man Lösungen für (11.17) mit $\mu = n^2$ und so die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das Eigenwertproblem (11.16) auf dem Kreis $B_1(0)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}^+$:

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= j_{n,m}^2, \\ \varphi_{n,m,0}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \cos(n\theta)\,J_n(j_{n,m}r), \\ \varphi_{n,m,1}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \sin(n\theta)\,J_n(j_{n,m}r) \text{ mit } n > 0. \end{aligned}$$

Hier ist J_n die n-te Besselfunktion erster Gattung und $j_{n,m}$ die m-te positive Nullstelle von J_n. Nach Normierung bilden diese Eigenfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem. Dass dieses System vollständig ist, haben wir hier jedoch nicht bewiesen.

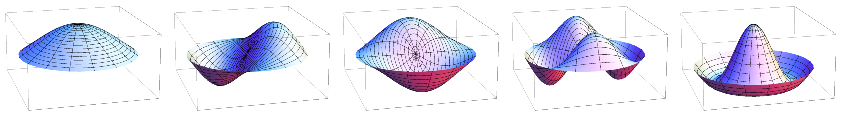


Abbildung 11.6: Darstellung von 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 11.13: $\varphi_{0,1,0}$, $\varphi_{1,1,0}$, $\varphi_{1,1,1}$, $\varphi_{2,1,0}$ und $\varphi_{0,2,0}$.

11.6 Zwei Gegenbeispiele

Das erste Beispiel ist von Hadamard selbst und zeigt, dass das Rückwärtsproblem bei der Wärmeleitungsgleichung seine dritte Bedingung nicht erfüllt.

Das zweite Beispiel ist von Tychonov. Es zeigt, dass ohne die Wachstumsbedingung in Theorem 11.1, es keine Eindeutigkeit für das Anfangwertproblem bei der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ gibt. Tychonov konstruiert eine nicht-triviale Lösung, die trivial, also mit 0, anfängt.

Beispiel 11.14 (Hadamard) *Wir haben gesehen, dass wenn*

$$u \in C^2\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^n \times [0,T]\right)$$

eine Lösung ist von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\, u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)\,, \\ u\,(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{11.19}$$

sogar gilt, dass $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right)$. *Dies bedeutet, dass das Rückwärtsproblem*

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\, u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-T,0)\,, \\ u\,(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{11.20}$$

nur möglicherweise lösbar ist, wenn $u_0 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Aber wenn es der Zufall sogar will, dass (11.20) lösbar ist, zeigt folgendes Beispiel von Hadamard, dass die Robustheit verletzt ist. Sei

$$u_\varepsilon\,(x,t) = \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin\left(x/\varepsilon\right).$$

Man berechnet sofort, dass $\left(\partial_t - \partial_x^2\right) u_\varepsilon\,(x,t) = 0$ *für* $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *und dass*

$$\left|u_\varepsilon\,(x,0)\right| = \left|\varepsilon \sin\left(x/\varepsilon\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Auch gilt für beliebige $t < 0$, *dass*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\|u_\varepsilon\,(x,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\|\varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin\left(x/\varepsilon\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} = \infty.$$

Das heißt, man kann kleine Störungen beim Anfangswert angeben mit beliebig großen Änderungen in der Lösung.

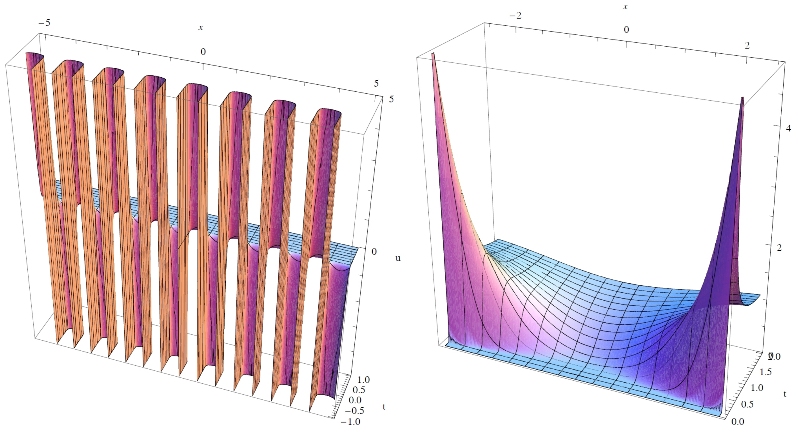


Abbildung 11.8: Links eine Skizze zu dem Gegenbeispiel von Hadamard mit $\varepsilon = \frac{1}{5}$. Rechts die Funktion von Tychonov aus Beispiel 11.15.

Beispiel 11.15 (Tychonov) *Wir haben die Eindeutigkeit gezeigt für die Lösung zu*

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\, u\,(x,t) = f\,(x,t) & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u\,(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{11.21}$$

wenn die Lösung zusätzlich eine Wachstumsbedingung erfüllt: Es gibt C&A mit

$$\left|u\,(x,t)\right| \leq Ce^{A|x|^2} \text{ für alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)\,.$$

Tychonov hat sich folgendes Beispiel überlegt: Man definiere

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ für } x, t \in \mathbb{R}$$

mit

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *und sogar dass*

$$\left| \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{2^n n!}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2} \right) \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2} \right).$$

Es folgt

$$|u(x,t)| \leq \exp\left(\frac{x^2}{t} \right) \exp\left(\frac{-1}{4t^2} \right) = \exp\left(\frac{4x^2 t - 1}{4t^2} \right) \tag{11.22}$$

und

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = 0.$$

Dieser Grenzwert gilt für jedes x, *aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig!*

Auch gilt

$$\left(\partial_t - \partial_x^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^{n+1} \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 0.$$

Die Funktion u *ist also eine nicht-triviale Lösung von*

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{11.23}$$

Es folgt selbstverständlich nicht aus (11.22), dass die C&A-Bedingung nicht erfüllt ist. Man kann jedoch zeigen, dass die Abschätzung in (11.22) fast optimal ist und dass u *tatsächlich die C&A-Bedingung nicht erfüllt.*

Mehr Details zu diesen Beispielen findet man im Buch von DiBenedetto [3].