Partielle Differentialgleichungen Woche 12

Die Laplace- und Poisson- Gleichungen

Die Struktur bei elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung ist nicht wesentlich verschieden bei Operatoren mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten. Technische Aspekte können leider unverhältnismäßig kompliziert werden bei allgemeinen elliptischen Randwertproblemen. Wir werden uns deshalb oft beschränken auf einen Prototyp elliptischer Differentialgleichungen, nämlich die Poisson-Gleichung[1]

$$\Delta u = f. \tag{12.1}$$

Den Differentialoperator[2]

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$$

nennt man Laplace-Operator. Setzt man $f = 0$ in (12.1), wird sie Laplace-Gleichung genannt. Meistens sucht man Lösungen von (12.1) auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit vorgegebenen Randwerten auf $\partial\Omega$.

[1]Siméon Denis Poisson (1781–1840) bekam 1802 eine Professur an der L'École Polytechnique in Paris. Er war ein Schüler von Pierre-Simon Marquis de Laplace.

[2]Stochastiker nehmen oft $\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ und für Potentialtheoretiker gilt $\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$.

12.1 Fundamentallösung

Definition 12.1 *Sei $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Die Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ definiert durch*

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \tfrac{-1}{2\pi} \ln |x| \,, \\ F_n(x) &= \tfrac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} \quad \text{für } n \geq 3, \end{aligned}$$

nennt man die Fundamentallösung zu $-\Delta$.

Bemerkung 12.1.1 *Man findet eine Fundamentallösung für einen rotationsinvarianten Operator wie $-\Delta$, wenn man eine passende Lösung von $-\Delta f(|x|) = 0$ für $|x| > 0$ nimmt. Das heißt, man sucht $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ derart, dass*

$$r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r) = 0.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\Delta f(|x|) &= \nabla \cdot \left(f'(|x|) \frac{x}{|x|} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{x_i} f'(|x|)\right) \frac{x_i}{|x|} + f'(|x|) \nabla \cdot \frac{x}{|x|} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f''(|x|) \left(\frac{x_i}{|x|}\right)^2 + f'(|x|) \left(\frac{n}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|^2} \right) \\ &= f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|)\end{aligned}$$

und via

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r)$$

folgt $f(r) = c_1 r^{2-n} + c_2$*, wenn* $n \geq 2$ *und* $f(r) = c_1 \log r + c_2$ *wenn* $n = 2$*. Die zweite Konstante spielt keine Rolle und* c_1 *sollte man derart wählen, dass folgendes stimmt:*

Lemma 12.2 *Im Sinne von Distributionen gilt* $-\Delta F_n = \delta_0$*.*

Beweis. Man soll zeigen, dass für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (oder $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x). \left(-\Delta \varphi(x)\right) dx = \varphi(0).$$

Wie bei Proposition 4.4 verwendet man, dass $F_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und dass

$$-\Delta F_n(x) = 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Nehmen wir $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, so gibt es eine Kugel $B_R(0)$, die den Träger von φ umfasst, und es gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) \, \left(-\Delta \varphi(x)\right) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} F_n(x) \, \Delta \varphi(x) \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(-\int_{\partial(B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0))} \left(F_n(x) \, \nabla \varphi(x) - \nabla F_n(x) \, \varphi(x)\right) \cdot \nu d\sigma_x \right. \\ &\qquad \left. - \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta F_n(x) \, \varphi(x) \, dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \, \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x \\ &\qquad - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \, \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x.\end{aligned}$$

Man findet für $n > 2$, dass

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \, \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x \right| \leq \\ &\qquad \frac{\varepsilon^{2-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{(n-2)\,\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \frac{\|\nabla \varphi\|_\infty}{n-2} \varepsilon, \\ &\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \, \left(\varphi(x) - \varphi(0)\right) \cdot \nu d\sigma_x \right| \leq \\ &\qquad \frac{\varepsilon^{1-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x| \, d\sigma_x \leq \|\nabla \varphi\|_\infty \varepsilon.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x)\ \left(-\Delta\varphi\left(x\right)\right) dx \\
&\quad = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x)\ \varphi\left(0\right)\cdot \nu d\sigma_x \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\omega_n}\left|x\right|^{1-n}\ \varphi\left(0\right)\ d\sigma_x \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\varphi\left(0\right)\int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \varphi\left(0\right).
\end{aligned}$$

Für $\varphi \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ benutzt man, dass φ und $\nabla\varphi$ schneller als jedes Polynom nach 0 konvergiert für $|x| \to \infty$. ∎

Aufgabe 12.1 *Eine Fundamentallösung für $\Delta^2 u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $n > 4$ ist*

$$\tilde{F}_n\left(x\right) = c_n\left|x\right|^{4-n}.$$

1. *Berechnen Sie c_n.*
2. *Begründen Sie, dass diese Funktion $\tilde{F}_n$ eine Fundamentallösung ist.*

Wenn $-\Delta F_n = \delta_0$ im Sinne von Distributionen, dann gilt im gleichen Sinne auch

$$-\Delta F_n\left(\cdot - y\right) = \delta_0\left(\cdot - y\right) = \delta_y\left(\cdot\right).$$

Anders gesagt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ \left(-\Delta\varphi\left(x\right)\right) dx = \varphi(y).$$

Wenn $-\Delta\varphi = f$ gilt, so hat man, wenn man x und y vertauscht und $F_n(z) = F_n(-z)$ bemerkt, dass

$$\varphi\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f\left(y\right) dy. \tag{12.2}$$

Man nennt (12.2) eine *Darstellungsformel* für $-\Delta\varphi = f$. Das heißt, wenn für φ und f gilt, dass $-\Delta\varphi = f$, dann gilt auch (12.2). Sie ist noch keine Lösungsformel. Das werden wir nun zeigen:

Proposition 12.3 *Sei $f \in C_0^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ und setze*

$$u\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f\left(y\right) dy. \tag{12.3}$$

Dann gilt $u \in C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Bevor wir den Beweis geben, eine Bemerkung, wie man es nicht beweisen kann. Man könnte naiverweise versuchen den Laplace-Operator durch das Integral zu schieben:

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f\left(y\right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x F_n(x-y)\ f\left(y\right) dy$$

Falsch

Wenn man jedoch bedenkt, dass

$$\begin{aligned}
&f\left(x\right) = -\Delta u\left(x\right) = -\Delta \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f\left(y\right) dy, \\
&\text{und } \int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_n(x-y)\ f\left(y\right) dy = 0,
\end{aligned}$$

dann kann man anscheinend Integral und Δ-Operator nicht vertauschen, denn dann wäre die Proposition falsch. Der

Grund, dass sich Integral und Δ nicht vertauschen lassen, ist, dass die zweiten Ableitungen von $x \mapsto F_n(x-y)$ nicht integrierbar sind und die Sätze über majorisierte oder monotone Konvergenz, die eine Vertauschung von der Integration und vom Limes beim Differenzquotienten erlauben, nicht anwendbar sind.

Beweis. Die ersten Ableitungen von $x \mapsto F_n(x-y)$ sind aber lokal integrierbar, und es folgt

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f(y)\,dy \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{F_n(x+he_i-y)-F_n(x-y)}{h}\ f(y)\,dy \\
&\qquad \text{(wegen majorisierter Konvergenz)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} \tfrac{F_n(x+he_i-y)-F_n(x-y)}{h}\ f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} F_n(x-y)\ f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Dann gilt mit einer partiellen Integration, dass

$$\begin{aligned}
\nabla u(x) &= \nabla \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x-y)\ f(y)\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x-y)\ f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ \nabla f(y)\,dy. \qquad (12.4)
\end{aligned}$$

Also ist u differenzierbar und weil ∇f stetig ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ \nabla f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z)\ \nabla_x f(x-z)\,dy$$

gilt, findet man, dass ∇u stetig ist, also gilt $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Auch gilt, dass

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ \partial_j f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} F_n(x-y)\ \partial_j f(y)\,dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i F_n)(z)\ \ (\partial_j f)(x-z)\,dy
\end{aligned}$$

existiert und sogar stetig ist. Also gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Weiter folgt

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) &= -\nabla \cdot \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ \nabla f(y)\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x-y) \cdot \nabla f(y)\,dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Wir bohren wieder ein kleines Loch, diesmal um x herum und finden

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y)\,dy \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x-y) \cdot \nabla f(y)\,dy \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x-y) \cdot f(y)\,\nu\ d\sigma_y \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta_y F_n(x-y)\ f(y)\,dy \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{1}{\omega_n} |x-y|^{1-n}\ \ f(y)\ \ d\sigma_x = f(x).
\end{aligned}$$

Nicht nur der letzte Schritt ist ähnlich wie im Beweis von Lemma 12.2. ■

Diese Proposition hat als Voraussetzung, dass f stetig differenzierbar ist und einen kompakten Träger hat. Beide Bedingungen kann man abschwächen. Es reicht, wenn f integrierbar ist und wenn die rechte Seite in (12.3) wohldefiniert ist. Wir werden dieser Behauptung hier nicht weiter nachgehen. Wir möchten die Annahmen nur in einer Richtung etwas abschwächen. Um zu zeigen, dass u definiert durch (12.3) in x_0 zweimal stetig differenzierbar ist reicht es, wenn f in einer Umgebung von x_0 stetig differenzierbar ist.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Man nehme $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x-x_0| \le \varepsilon, \\ \dots & \text{für } \varepsilon < |x-x_0| < 2\varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x-x_0| \ge 2\varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt

$$u(x) = \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y)\ \chi(y)\, f(y)\, dy \\ + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y)\ (1-\chi(y))\, f(y)\, dy.$$

Nehmen wir $x \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_0)$, so gilt für $y \in \mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon(x_0)$, dass $|x-y| \ge \frac{1}{2}\varepsilon$. Dies bedeutet, dass die singuläre Stelle im rechten Integral mindestens $\frac{1}{2}\varepsilon$ vom Integrationsgebiet entfernt liegt und somit folgt sogar für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y)\ (1-\chi(y))\, f(y)\, dy \in C^\infty\left(B_{\varepsilon/2}(x_0)\right).$$

Für das linke Integral können wir Proposition 12.3 verwenden. Für $f \in C^1\left(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}\right)$ folgt

$$x \mapsto \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y)\ \chi(y)\, f(y)\, dy \in C^2(\mathbb{R}^n).$$

Übrigens gilt für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, dass u in (12.3) wohldefiniert ist und sogar dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f(y)\, dy \in C(\mathbb{R}^n). \tag{12.5}$$

Es gilt nämlich, dass wenn der Träger von f in $B_R(0)$ liegt, dass

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} F_n(z-y)\ f(y)\, dy\right| = \left|\int_{B_R(0)} F_n(z-y)\ f(y)\, dy\right| \le \\ \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R(0)} F_n(z-y) dy \le C_R \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Für $f \ge 0$ kann man den Satz zur majorisierten Konvergenz verwenden um zu zeigen, dass

$$\lim_{z \to x} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z-y)\ f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f(y)\, dy.$$

Wenn f kein festes Vorzeichen hat, betrachtet man getrennt $f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f)$ und $f_- = \frac{1}{2}(|f|-f)$. Das liefert die Stetigkeit der Abbildung (12.5). Wir fassen zusammen:

Lemma 12.4 *Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und nehme an, f hat einen kompakten Träger. Dann ist*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\ f(y)\, dy. \tag{12.6}$$

wohldefiniert und es gilt $u \in C(\mathbb{R}^n)$.

Wenn außerdem $f_{|\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}} \in C^1\left(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}\right)$, *dann gilt*

$$u_{|\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}} \in C^2\left(\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}\right) \tag{12.7}$$

und $-\Delta u(x) = f(x)$ *für* $x \in \overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}$.

Bemerkung 12.4.1 *Statt anzunehmen, dass f einen kompakten Träger hat, reicht es, wenn f genügend schnell fallend ist.*

Aufgabe 12.2 *Sei $k > 1$. Zeigen Sie, dass für $f \in C(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 3$ und*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\left(1+|x|^2\right)^k} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n,$$

das Integral in (12.6) wohldefiniert ist.

Hinweis: trennen Sie das Integrationsgebiet $\mathbb{R}^n$ in

$$A := \{y \in \mathbb{R}^n; |x-y| \leq |y|\} \text{ und } B := \mathbb{R}^n \setminus A,$$

und begründen und verwenden Sie, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \int_A |x-y|^{2-n} \frac{M}{\left(1+|y|^2\right)^k} dy &\leq M\omega_n \int_{r=0}^{\infty} \frac{r}{\left(1+r^2\right)^k} dr, \\ \int_B |x-y|^{2-n} \frac{M}{\left(1+|y|^2\right)^k} dy &\leq M\omega_n \int_{r=0}^{\infty} \frac{r}{\left(1+r^2\right)^k} dr. \end{aligned}$$

12.2 Randwertprobleme

Das eigentliche Problem, an dem man interessiert ist, ist

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12.8}$$

Wir werden grob einige Möglichkeiten beschreiben, wie man dieses Problem angehen kann. Vorher geben wir zwei Möglichkeiten an, wie man dieses Problem vereinfachen kann.

Es sei bemerkt, dass wenn man

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \text{ und } \begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{12.9}$$

für allgemeine f und φ lösen kann, man auch (12.8) lösen kann. Denn seien v und w Lösungen von (12.9), dann ist $u = v + w$ eine Lösung von (12.8). Manchmal braucht man für eine Lösung von (12.8) jedoch nur eine der beiden Randwertprobleme aus (12.9) zu lösen:

- Wenn man das rechte Randwertproblem in (12.9) lösen kann, dann kann man auch (12.8) lösen: Setze

$$u_1(x) = \int_\Omega F_n(x-y)\, f(y)\, dy \tag{12.10}$$

  und sei w eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi - u_1 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

  so findet man, dass $u = u_1 + w$ eine Lösung ist von (12.8).

- Wenn man das linke Randwertproblem in (12.9) lösen kann und die Funktion φ lässt sich schreiben mittels $\varphi = \Phi_{|\partial\Omega}$ für eine Funktion $\Phi \in C^2(\overline{\Omega})$, dann kann man auch (12.8) lösen. Denn sei v eine Lösung von
$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta\Phi & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$
so ist $u = v + \Phi$ eine Lösung von (12.8).

In diesen Ansätzen sind ein paar Probleme an dem Rand des Gebietes versteckt. Die Formel in (12.10) folgt aus Proposition 12.3, wenn man die Funktion $\tilde{f}$ einsetzt, die wie folgt definiert ist:
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann bekommt man nämlich
$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y)\, \tilde{f}(y)\, dy = \int_\Omega F_n(x-y)\, f(y)\, dy.$$
Wenn $f \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt, folgt jedoch nicht, dass $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Um a-priori eine klassische Lösung zu bekommen, müsste man $f \in C^1(\bar{\Omega})$ erweitern zu einer Funktion $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Für eine solche Erweiterung braucht man jedoch, dass der Rand $\partial\Omega$ genügend glatt ist. Verwendet man statt Proposition 12.3 nun Lemma 12.4, dann folgt für die Funktion u_1 aus (12.10) nur $C^2(\Omega)$.

12.2.1 Die Methode von Perron

Für harmonische Funktionen u auf Ω, also $\Delta u = 0$ in Ω, sagt Proposition 4.4, dass
$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, d\sigma_x$$
für jede Sphäre $\partial B_r(x_0)$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Diese Aussage ist gleichwertig zu
$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx$$
für jede Kugel $B_r(x_0)$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Den (Hyper)Flächeninhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ nennen wir ω_n; das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist dann $\frac{1}{n}\omega_n$.

Definition 12.5 *Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ nennt man* superharmonisch *auf Ω, wenn*
$$u(x_0) \geq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx \text{ für jede Kugel } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ nennt man subharmonisch *auf Ω, wenn*
$$u(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx \text{ für jede Kugel } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Für
$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{12.11}$$
kann man wie folgt verfahren:

Lösung 12.1 (Mit Hilfe des Maximum Prinzips) *Perron*[3] *definiert*
$$S_\varphi(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega});\ \begin{array}{c} u \text{ superharmonisch in } \Omega \\ u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{array} \right\}$$
und setzt
$$\bar{u}(x) = \inf \left\{ u(x); u \in S_\varphi(\overline{\Omega}) \right\}.$$

[3]Oskar Perron, 1880 Frankenthal in der Pfalz – 1975 München

Bemerkung 12.5.1 *Selbstverständlich kann man auch*

$$\underline{u}(x) = \sup\left\{u(x)\,;u \in s_\varphi(\,\overline{\Omega}\,)\right\}$$

mit

$$s_\varphi(\,\overline{\Omega}\,) = \left\{u \in C\left(\overline{\Omega}\right);\ \begin{array}{c} u \text{ subharmonisch in } \Omega \\ u \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{array}\right\}$$

betrachten. Mit Hilfe des Maximumprinzips findet man, dass $\bar{u} \geq \underline{u}$. Aber sogar wenn $\bar{u} = \underline{u}$ gilt, folgt nicht unbedingt, dass die Randbedingung erfüllt ist.

Man kann zeigen, dass $\bar{u}$ harmonisch ist auf Ω und dass $u \geq \varphi$ auf $\partial\Omega$. Wenn man zusätzlich annimmt, dass Ω einen „netten" Rand hat und φ stetig ist, kann man sogar zeigen, dass $\bar{u} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\bar{u} = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Was genau nett ist, soll noch erklärt werden. Das Maximum Prinzip sagt aus, dass eine subharmonische Funktion ein Maximum nur am Rand des Gebietes annehmen kann. Für eine superharmonische Funktion folgt, dass sie ein Minimum nur am Rande annehmen kann und so auch, dass $\bar{u} \geq \min\{\varphi(x); x \in \partial\Omega\}$. Genaueres folgt später.

Aufgabe 12.3 *Sei Ω ein Intervall in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede subharmonische Funktion auf Ω konvex ist und dass jede stetige konvexe Funktion auf Ω subharmonisch ist.*

12.2.2 Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz

Das Argument von Riesz ist funktionalanalytischer Natur und braucht passende Funktionenräume. Für das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{12.12}$$

braucht man Sobolev-Räume, die auch noch den Randwert einschließen. Dazu schränkt man die üblichen Sobolev-Räume aus Definition 3.10 wie folgt ein:

Definition 12.6 *Für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1,\infty)$ definiert man*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}. \tag{12.13}$$

Mit $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$ ist gemeint, dass $W_0^{k,p}(\Omega)$ der Abschluss ist von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$-Norm.

Bemerkung 12.6.1 *$W_0^{k,p}(\Omega)$ nennt man auch* Sobolev-Raum *und ist Teilraum vom Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ und $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ist eine Norm für $W_0^{k,p}(\Omega)$. Als Erinnerung:*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|m|\leq k}\int_\Omega |D^m u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist vollständig bezüglich dieser Norm.

Theorem 12.7 (Ungleichung von Poincaré-Friedrichs) *Nehme an Ω ist derart, dass*

$$\sup\{x_1; x \in \Omega\} - \inf\{x_1; x \in \Omega\} \leq d_\Omega. \tag{12.14}$$

Dann gilt für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq d_\Omega\ \ \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}. \tag{12.15}$$

Bemerkung 12.7.1 *Hier ist (12.14) eine Bedingung, die sagt dass Ω in einem Streifen liegt, wo der x_1-Koordinate beschränkt ist. Das darf auch eine andere Richtung sein.*

Beweis. Weil $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, reicht es, wenn wir die Ungleichung für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ beweisen. In einer Dimension können wir annehmen, dass $\Omega = (0,d)$. Für $u \in C_0^\infty((0,d))$ gilt

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(x)\,dx = \int_0^x u'(x)\,dx$$

und mit Cauchy-Schwarz, dass

$$\begin{aligned}|u(x)| = \left|\int_0^x u'(x)\,dx\right| &\le \int_0^x |u'(x)|\,dx \\ &\le \sqrt{\int_0^x 1dx \int_0^x |u'(x)|^2\,dx} \\ &= \sqrt{x}\sqrt{\int_0^d |u'(x)|^2\,dx} = \sqrt{x}\,\|u'\|_{L^2(0,d)}\,.\end{aligned}$$

Integriert man, so folgt

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(0,d)}^2 &= \int_0^d |u(x)|^2\,dx \\ &\le \int_0^d \sqrt{x}^2 dx\ \ \|u'\|_{L^2(0,d)} = \tfrac{1}{2}d^2\,\|u'\|_{L^2(0,d)}^2\end{aligned}$$

und man findet (12.15). In höheren Dimensionen können wir annehmen, dass

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < d\}$$

und wir erweitern u auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch $u = 0$. Für diese erweiterte Funktion gilt

$$u \in C_0^\infty\left((0,d_1) \times \mathbb{R}^{n-1}\right).$$

Mit Fubini-Tonelli und dem ein-dimensionalen Ergebnis finden wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx &= \int_{(0,d)\times\mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^2\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{(0,d_1)} |u(x_1,x')|^2\,dx_1dx' \\ &\le \tfrac{1}{2}d^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{(0,d_1)} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x')\right|^2 dx_1dx' \\ &= \tfrac{1}{2}d^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx \le \tfrac{1}{2}d^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Weil $\frac{1}{2} \le 1$ folgt (12.15). ■

Aufgabe 12.4 *Man definiert* $C_0^k(\overline{\Omega}) =$

$$\left\{u \in C^k(\overline{\Omega});\ \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } |\alpha| \le k\right\}.$$

1. *Zeigen Sie, dass für alle* $u \in C^2[0,1] \cap C_0^1[0,1]$ *gilt:*

$$\|u'\|_{L^2(0,1)} \le \|u''\|_{L^2(0,1)}\,. \tag{12.16}$$

Weil auch $\|u\|_{L^2(0,1)} \le \|u'\|_{L^2(0,1)}$ *für solche Funktionen gilt, findet man, dass* $c > 0$ *existiert mit:*

$$\|u\|_{W^{2,2}(0,1)} \le c\,\|u''\|_{L^2(0,1)}\,, \tag{12.17}$$

für alle $u \in C^2[0,1] \cap C_0^1[0,1]$.

2. *Zeigen Sie das letzte.*

3. *Zeigen Sie, dass (12.16) sogar für alle* $u \in C^2[0,1] \cap C_0^0[0,1]$ *gilt und dass dann auch (12.17) folgt.*

   Hinweis: Für jede Funktion $u \in C^2[0,1] \cap C_0^0[0,1]$ *gilt* $u(0) = u(1) = 0$. *Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass eine Stelle* $x_0 \in (0,1)$ *existiert mit*

$$u'(x_0) = \frac{u(0) - u(1)}{1} = 0.$$

4. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass es* $c_\Omega > 0$ *gibt derart, dass für alle* $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C_0^0(\overline{\Omega})$:

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \left\| \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir kommen nun zu einer zweiter Lösungmöglichkeit, jedenfalls wenn man die schwache Version vom Randwertproblem (12.12) betrachtet. Die schwache Formulierung einer Lösung u ist wie folgt:

- *Es gibt* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *derart, dass*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f\ v)\, dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wir verwenden das folgende:

1. Der Sobolev-Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ dx$$

   ist ein Hilbert-Raum[4].

2. Für Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^2(\Omega)$ definiert man das Funktional $F(v) : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(v) = \int_\Omega f(x)\ v(x)\ dx$$

   Dieses F ist linear und stetig. Die Stetigkeit folgt aus:

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega f(x)\ v(x)\ dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|\ |v(x)|\ dx$$
$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq d\, \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Theorem 12.8 (Der Darstellungssatz von Riesz[5]) *Sei* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Hilbertraum und sei* $F : H \to \mathbb{R}$ *linear und stetig. Dann gibt es* $u \in H$ *derart, dass*

$$\langle u, v\rangle = F(v) \text{ für alle } v \in H.$$

Wir werden diesen Satz nicht beweisen.

Korollar 12.9 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet. Dann existiert für jede Funktion* $f \in L^2(\Omega)$ *eine Funktion* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *derart, dass für alle* $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ v(x)\ dx.$$

[4] Ein Hilbertraum $(H, \|\cdot\|_H)$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, für das gilt $\langle u,u\rangle = \|u\|_H^2$ für alle $u \in H$.

[5] Frigyes Riesz, 1880 – 1956, war ein Ungarischer Mathematiker.

Bemerkung 12.9.1 *Dies ist genau die Definition einer schwachen Lösung von (12.12).*

Bemerkung 12.9.2 *Das Lax-Milgram Theorem verallgemeinert dieses Theorem.*

Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, dass wir kaum Bedingungen an Ω haben, nämlich nur die Beschränktheit. Es ist aber nicht klar und meistens auch nicht richtig, dass diese schwache Lösung u eine klassische Lösung ist. Die schwache Lösung liegt meistens nur dann in $C^2\left(\bar{\Omega}\right)$, wenn es $\alpha > 0$ gibt mit $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$.

12.2.3 Durch Variationsrechnung

Hilbert[6] betrachtete das Funktional

$$J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}\left|\nabla u(x)\right|^2 - f(x)\, u(x)\right) dx$$

und konnte folgendes zeigen:

Lösung 12.2 (Mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung) *Für Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^2(\Omega)$ gibt es $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ derart, dass*

$$J(u_0) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

[6] David Hilbert, 1862 Königsberg – 1943 Göttingen, war wahrscheinlich der einflussreichste Mathematiker seiner Zeit.

Weil es $C_\Omega > 0$ gibt derart, dass

$$\int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx \leq C_\Omega \int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx \text{ für all } u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

findet man mit Hilfe von Cauchy-Schwarz, dass für $\varepsilon = \frac{1}{2}C_\Omega^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}\left|\nabla u(x)\right|^2 - f(x)\, u(x)\right) dx \\ &\geq \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \tfrac{1}{4}\int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{12.18}$$

- *Also ist $J(u)$ für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ nach unten beschränkt und es folgt, dass das Infimum existiert.*

Um zu zeigen, dass dieses Infimum auch angenommen wird, das heißt, ein Minimum ist, nimmt man eine minimierende Folge. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ ist eine minimierende Folge, wenn

$$J(u_n) \to \inf\left\{J(u)\,; u \in W_0^{1,2}(\Omega)\right\}.$$

- *Die Koerzitivität. Man bemerkt, dass aus (12.18) folgt:*

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \to \infty \text{ impliziert } J(u) \to \infty.$$

Also sind minimierende Folgen beschränkt: Es gilt für irgendein $R \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq R.$$

- *Aus Funktionalanalysis: Beschränkte Folgen in $W_0^{1,2}(\Omega)$ haben schwach konvergente Teilfolgen.*

Es gibt $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $u_\infty \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit für $k \to \infty$, dass

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k} \cdot \nabla v \, dx \to \int_\Omega \nabla u_\infty \cdot \nabla v \, dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Man schreibt: $u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$.
Leider haben wir im Allgemeinen nicht, dass u_{n_k} nach u_0 konvergiert in Norm. Was uns rettet, ist Folgendes:

- *J ist schwach unterhalb stetig:*

$$v_k \rightharpoonup v \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega) \text{ impliziert } \lim_{k\to\infty} J(v_k) \geq J(v).$$

Für eine solche Funktion $u_\infty \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt also

$$J(u_\infty) \leq J(u) \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

und dann auch, dass

$$J(u_\infty) \leq J(u_\infty + \varepsilon\psi) \text{ für alle } \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ und } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für die *erste Variation*

$$\partial J(u_\infty, \psi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \tfrac{\partial}{\partial\varepsilon} J(u_\infty + \varepsilon\psi),$$

dass für alle $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$0 = \partial J(u_\infty, \psi) = \int_\Omega (\nabla u_\infty(x) \cdot \nabla\psi(x) - f(x)\ \psi(x))\, dx$$

und damit, dass die Funktion u_∞, die J minimalisiert in $W_0^{1,2}(\Omega)$, eine schwache Lösung ist.

12.2.4 Ein Beispiel

Die verschiedenen Lösungstypen geben auch tatsächlich unterschiedliche Ergebnisse. Man betrachte für $n \geq 2$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < |x| < 1\}$$

und das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{12.19}$$

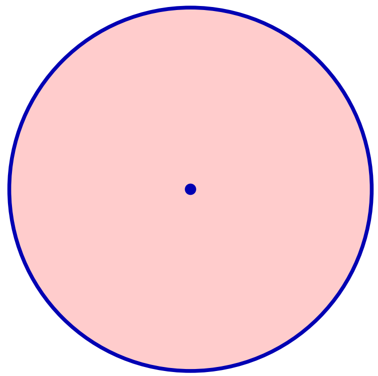


Abbildung 12.1: Eine punktierte Kreisscheibe

Behauptung 12.10 *Problem (12.19) hat keine Lösung in $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.*

Wenn es eine solche Lösung u_0 gibt, ist auch die rotierte Funktion $u_\varphi = u_0 \circ R_\varphi$ eine Lösung mit R_φ irgendeine Rotation um 0. Sogar $u_{rad} := \frac{1}{\omega_n} \int_{\varphi\in\partial B_1(0)} u_0(R_\varphi x)\, d\varphi$ wäre eine Lösung. Weil u_{rad} radialsymmetrisch ist, findet man für $U(|x|) = u_{rad}(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-r^{1-n}\partial_r r^{n-1}\partial_r U(r) = 1.$$

Man hat $\partial_r r^{n-1}\partial_r U(r) = -r^{n-1}$ und via $r^{n-1}\partial_r U(r) = c - \frac{1}{n}r^n$ und $\partial_r U(r) = cr^{1-n} - \frac{1}{n}r$ folgt

$$\begin{aligned} U(r) &= c_1 + c_2 r^{2-n} - \tfrac{1}{2n}r^2 \quad \text{für } n > 2, \\ U(r) &= c_1 + c_2 \log r - \tfrac{1}{4}r^2 \quad \text{für } n = 2. \end{aligned}$$

Es gibt aber keine derartige Funktion, die $U(0) = 0 = U(1)$ erfüllt. Es gibt also keine Lösung $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Behauptung 12.11 *Die Funktion $u(x) = \frac{1}{2n}\left(1 - |x|^2\right)$ ist eine schwache Lösung von (12.19) in $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Eine schwache Lösung ist hier eine Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, also im $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$-Sinne durch $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ approximierbar, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega 1 \; v \; dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wir werden diese Behauptung nicht bis ins Detail beweisen. Wir zeigen nur, dass der Funktionswert in einem Punkt nicht wahrgenommen wird im Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$.

Dies sieht man am folgenden Beispiel. Wir werden zeigen, dass die Funktionenfolge

$$\varphi_k(x) = \frac{\log(1 + k|x|)}{\log(1+k)}\left(1 - |x|^2\right)$$

in $W_0^{1,2}(B_1(0))$ gegen $\varphi_\infty(x) = 1 - |x|^2$ konvergiert, wenn $n \geq 2$. Trotzdem gilt

$$\varphi_k(0) = 0 \neq 1 = \varphi_\infty(0).$$

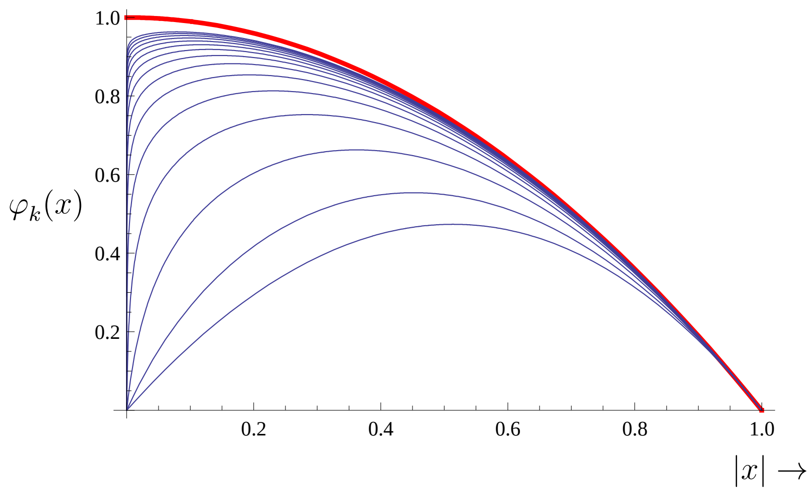


Abbildung 12.2: φ_k konvergiert gegen $1 - |\cdot|^2$ in $W_0^{1,2}(B_1(0))$ und nicht in $C(\overline{B_1(0)})$.

Es gilt

$$\begin{aligned} &\left\|\varphi_k(\cdot) - \left(1 - |\cdot|^2\right)\right\|^2_{W_0^{1,2}(B_1)} \\ &= \int_{B_1(0)} \left|\nabla\left(\left(\frac{\log(1+k|x|)}{\log(1+k)} - 1\right)\left(1 - |x|^2\right)\right)\right|^2 dx = \\ &\omega_n \int_{r=0}^1 \left|\frac{k(1-r^2)}{(1+kr)\log(1+k)} - \left(\frac{\log(1+kr)}{\log(1+k)} - 1\right)2r\right|^2 r^{n-1} dr \end{aligned}$$

$$\leq \omega_n \int_{r=0}^{1} 2 \left(\left| \frac{k\left(1-r^2\right)}{(1+kr)\log(1+k)} \right|^2 \right.$$
$$\left. + \left| \left(\frac{\log(1+kr)}{\log(1+k)} - 1 \right) 2r \right|^2 \right) r^{n-1} dr$$
$$= \cdots = \mathcal{O}\left(\frac{\log\left(1+k^2\right)}{\left(\log(1+k)\right)^2} \right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(k)} \right) \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Zu den Pünktchen bemerken wir folgendes: Für $n \geq 2$ und auch nur dann gilt, dass

$$\left(\frac{k\left(1-r^2\right)}{(1+kr)\log(1+k)} \right)^2 r^{n-1} \leq \frac{2}{\left(\log(1+k)\right)^2} \frac{k^2 r}{1+k^2 r^2}$$

und

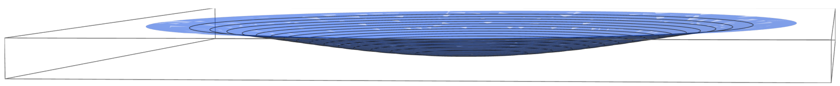
$$\int_0^1 \frac{2k^2 r}{1+k^2 r^2} dr = \log\left(1+k^2\right).$$

Der Rest des Integrals lässt sich einfacher abschätzen.

Aufgabe 12.5 *Die Auslenkung u einer dünnen eingeklemmten Platte der Form $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ durch das Eigengewicht, wird beschrieben durch eine Lösung von:*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12.20}$$

1. *Berechnen Sie für $\Omega = B_1(0)$ die eindeutige klassische Lösung u.*

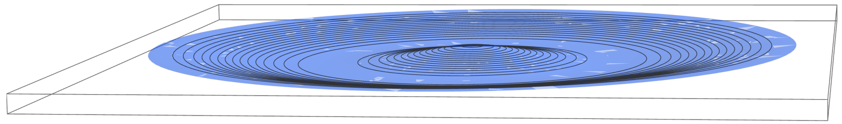


In der Skizze ist die positive Richtung nach unten.

2. *Zeigen Sie, dass*

$$u_0(x) = \tfrac{1}{64}\left(|x|^4 - |x|^2 - 2\,|x|^2 \log|x| \right)$$

eine Lösung ist für $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$.



3. *Zeigen Sie, dass $u_0 \in W^{2,2}(B_1(0))$.*
4. *Stimmt es, dass $u_0 \in W_0^{2,2}(B_1(0))$?*
5. *Für welche $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in [0,1]$ gilt $u_0 \in C^{k,\gamma}(\overline{B_1(0)})$?*

Eine schwache Lösung von (12.20) wird definiert als eine Funktion $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \left(\Delta u(x)\ \Delta\varphi(x) - 1\ \varphi(x) \right) dx = 0$$

für alle $\varphi \in W_0^{2,2}(\Omega)$.

6. *Ist u_0 eine schwache Lösung von (12.20) für $\Omega = B_1(0)$?*
7. *Welche Differentialgleichung erfüllt u_0 im Sinne von Distributionen auf $B_1(0)$?*