

Ordnung und Existenz bei Laplace

13.1 Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel

Bevor wir die oben genannten Lösungsmethoden anschauen, werden ein paar Fälle vorgestellt, bei denen man eine fast explizite Lösung geben kann.

Beispiel 13.1 Für einige f ist es möglich eine Formel für eine Lösung auf dem Halbraum zu geben:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Man definiert

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \dots & \text{für } x \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ -f(-x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

und setzt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \tilde{f}(y) dy. \quad (13.1)$$

Wenn $f \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Hat f auch noch einen kompakten Träger oder fällt die Funktion f genügend schnell für $|x| \rightarrow \infty$, dann folgt mit Proposition 12.3, dass

$$-\Delta u = \tilde{f} = f \text{ auf } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Man findet aus Symmetriegründen, dass

$$u(-x_1, x_2, \dots, x_n) = -u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wenn f die Bedingungen von Lemma 12.4 erfüllt, ist u stetig und es folgt, dass

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Das heißt, u in (13.1) liefert eine Lösung.

Man kann die Funktion in (13.1) noch anders schreiben.
Wir setzen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^* = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

und finden

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y^*) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y^*) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} G(x,y) f(y) dy \end{aligned}$$

mit

$$G(x,y) = F_n(x-y) - F_n(x-y^*) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$$

Man bemerke, dass nur $x \mapsto F_n(x-y)$ eine Singularität innerhalb $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ hat, weil $y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Definition 13.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und betrachte

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.2)$$

für genügend nette Funktionen f wie zum Beispiel $f \in C(\overline{\Omega})$.
Eine Funktion $G_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ derart, dass

$$u(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x,y) f(y) dy,$$

für jede solche Funktion f eine Lösung von (13.2) gibt, nennt man eine Greensche¹ Funktion.

Formell hat eine Greensche Funktion folgende Eigenschaften:

- $-\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x)$ für $x, y \in \Omega$;
- $G(x,y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $y \in \Omega$.

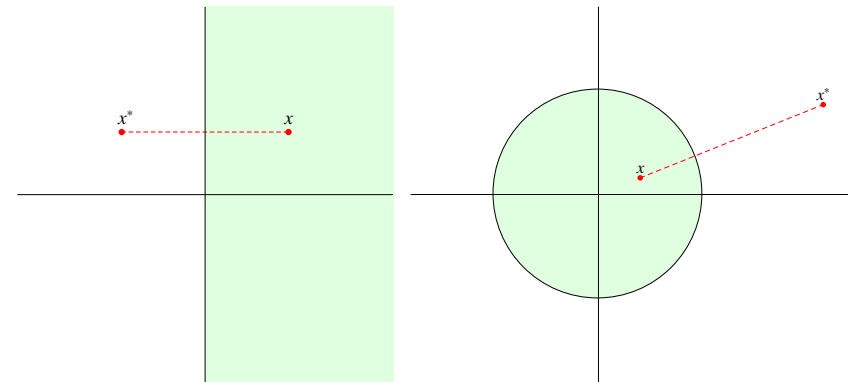


Abbildung 13.1: Halbraum und Kugel haben explizite Greensche Funktionen.

Beispiel 13.3 Betrachte das Gebiet $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Definiere die Kelvin-Spiegelung von $B_R(0) \setminus \{0\}$ zu $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ durch

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

¹Georg Green, 1793 – 1841, Britischer Mathematiker.

Dann ist

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right) \quad (13.3)$$

eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases} \quad (13.4)$$

Für $y \in B_R(0)$ folgt $|y^*| > R$ und man sieht, dass $x \mapsto F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$ keine Singularität für $x \in B_R(0)$ hat. Man sollte sich fragen was passiert, wenn $y = 0$. Weil

$$\left|\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right|^2 = \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^2 = \frac{|y|^2|x|^2}{R^2} - 2x \cdot y + R^2 \quad (13.5)$$

sieht man, dass $F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$ für $y = 0$ sogar unendlich glatt fortsetzbar ist durch $F_n(R)$.

Formell folgt, mit y als Parameter, dass

$$-\Delta G_{B_R(0)}(\cdot, y) = \delta_y - \frac{|y|^2}{R^2} \delta_{y^*} = \delta_y \quad (13.6)$$

für Funktionen mit Träger innerhalb Ω .

Weil (13.5) gilt, kann man x und y vertauschen, es folgt

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|x|}{R}(y - x^*)\right),$$

und wegen

$$\lim_{|x| \uparrow R} \frac{|x|}{R}(y - x^*) = y - x,$$

findet man

$$G_{B_R(0)}(x, y) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(0) \text{ und } y \in B_R(0). \quad (13.7)$$

Die Gleichungen (13.6) und (13.7) lassen vermuten, dass $(x, y) \mapsto G_{B_R(0)}(x, y)$ tatsächlich eine Greensche Funktion ist für (13.4). Man verwende dazu die Ergebnisse aus Abschnitt 12.1.

Aufgabe 13.1 Wir betrachten das unbeschränkte Gebiet $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$. Auch hier gibt es eine Greensche Funktion, die eine Lösung liefert für (13.2), jedenfalls wenn f einen kompakten Träger hat. Geben Sie diese Greensche Funktion an.

13.2 Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten

In Sektion 13.1 haben wir eine Lösungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases}$$

gefunden:

$$u(x) = \int_{B_R(0)} G_{B_R(0)}(x, y) f(y) dy \quad (13.8)$$

mit

$$G_{B_R(0)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{(R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2)}{R^2|x-y|^2} \right) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left(|x-y|^{2-n} - \left| \frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y \right|^{2-n} \right) & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \quad (13.9)$$

Die erste Formel in (13.9) ergibt sich übrigens direkt durch (13.5) und die Eigenschaften vom Logarithmus.

Eine Greensche Funktion existiert für allgemeinere Gebiete. Sucht man eine solche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.10)$$

das heißt

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy$$

ist eine Lösung (13.10), dann kann man sagen, dass

$$G_{\Omega}(x, y) = F_n(x - y) - h(x, y)$$

mit $h(\cdot, y)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta h(\cdot, y) = 0 & \text{in } \Omega, \\ h(\cdot, y) = F_n(\cdot - y) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.11)$$

Im Moment führen diese Überlegungen uns nicht weiter. Für die Existenz einer Greenschen Funktion auf Ω müsste man erst mal (13.11) lösen können. Nur im Fall einer Kugel hatten wir eine explizite Funktion. Für diesen Fall kann man die

folgenden Eigenschaften zeigen. Auch für andere beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ gibt es eine Greensche Funktion mit diesen Eigenschaften. Das werden wir hier nicht zeigen.

Behauptung 13.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.12)$$

hat die folgenden Eigenschaften:

1. $G_{\Omega} - F_n \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$, also folgt

$$G_{\Omega} \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega});$$

2. $G_{\Omega} \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}})$;

3. $\Delta_x G_{\Omega}(x, y) = 0$ für $(x, y) \in \Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega}$;

4. $G_{\Omega}(x, y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $y \in \Omega$.

5. $G_{\Omega}(x, y) = G_{\Omega}(y, x)$ für $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}}$.

Hier ist $D_A = \{(x, x); x \in A\}$ die Diagonale von $A \times A$.

Bemerkung 13.4.1 Die Eigenschaften 1, 3 und 4 legen die Funktion fest.

Bemerkung 13.4.2 Für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gibt es höchstens eine Greensche Funktion für (13.12). Wenn es zwei solcher Funktionen geben würde, sagen wir G_1 und G_2 , dann gibt es ein f derart, dass $u_1 = \int_{\Omega} G_1(\cdot, y) f(y) dy$ und $u_2 = \int_{\Omega} G_2(\cdot, y) f(y) dy$ unterschiedlich sind. Die Differenz

dieser beiden Funktionen ist harmonisch auf Ω und für beschränkte Gebiete wird das Maximum und das Minimum von harmonischen Funktionen auf dem Rand angenommen. Also folgt $u_1 - u_2 = 0$ in Ω und der Widerspruch.

Nehmen wir an, Ω hat eine solche Greensche Funktion G_Ω und dass außerdem gilt

$$y \mapsto G(x, y) \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \{x\}) \text{ für alle } x \in \Omega. \quad (13.13)$$

Verwenden wir die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} (u \partial_\nu v - v \partial_\nu u) d\sigma \quad (13.14)$$

für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $-\Delta u = f$ und $v = G_\Omega(x, \cdot)$ auf $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ statt Ω , so finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} (u(y) \Delta_y G_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) \Delta u(y)) dy = \\ \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} (u(y) \partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y)) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Aus Eigenschaften 3 und 4 folgt

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} u(y) \Delta_y G_\Omega(x, y) dy = 0$$

und

$$\int_{\partial \Omega} G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = 0.$$

Aus Eigenschaft 1 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} G_\Omega(x, y) d\sigma_y = \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} F_n(x - y) d\sigma_y = u(x), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} F_n(x - y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = 0. \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese Gleichungen mit (13.15) so folgt mit $\varepsilon \downarrow 0$, dass

$$\int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) dy = u(x) + \int_{\partial \Omega} u(y) \partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) d\sigma_y. \quad (13.16)$$

Dies bedeutet, wir haben eine Darstellungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial \Omega, \end{cases} \quad (13.17)$$

bekommen.

Proposition 13.5 Sei G_Ω eine Greensche Funktion für Ω mit Eigenschaften wie in Behauptung 13.4 und sei (13.13) erfüllt. Dann ist der Poisson-Kern

$$K_\Omega(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) \quad (13.18)$$

wohldefiniert für $y \in \partial\Omega$ und $x \in \bar{\Omega} \setminus \{y\}$. Wenn (13.17) eine Lösung hat, wird sie dargestellt durch

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} K_{\Omega}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y. \quad (13.19)$$

Bemerkung 13.5.1 Für viele Gebiete Ω ist (13.19) sogar eine Lösungsformel für (13.17). Die Formel in (13.19) folgt aus (13.16).

13.3 Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten

Durch (Kelvin-)Spiegelungen kann man auf einigen Gebieten explizite Greensche Funktionen konstruieren. Wir geben ein paar Beispiele.

Beispiel 13.6 Die Halbkugel

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0 \text{ und } |x| < 1\}$$

hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = F_n(x - y) - F_n(|y|(x - y^*)) - F_n(x - \bar{y}) + F_n(|y|(x - \bar{y}^*))$$

mit $y^* = |y|^{-2}y$ und $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Beispiel 13.7 Der Streifen $S = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < \ell\}$ hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (F_n(x - y + 2k\ell \mathbf{e}_1) - F_n(x - \bar{y} + 2k\ell \mathbf{e}_1))$$

mit $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$ und $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

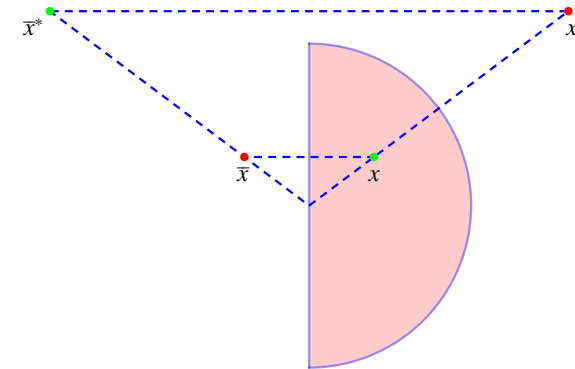


Abbildung 13.2: Konstruktion der Greenschen Funktion auf der Halbkugel.

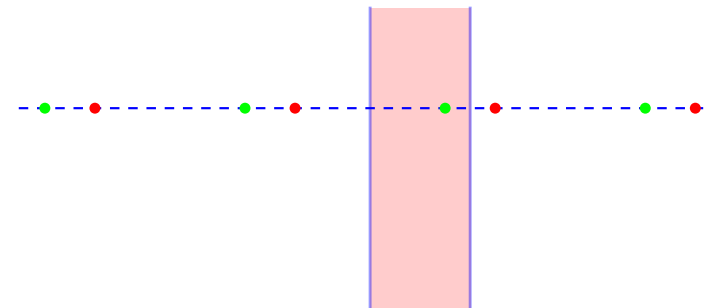


Abbildung 13.3: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Streifen.

Beispiel 13.8 Das Tortenstück

$$T = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2; r > 0 \text{ und } 0 < \phi < \frac{1}{6}\pi\}$$

hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k=0}^5 \left(F_2(x - R_{\pi/3}^k y) - F_2(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}) + F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}^*)) - F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k y^*)) \right),$$

wobei $R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$.

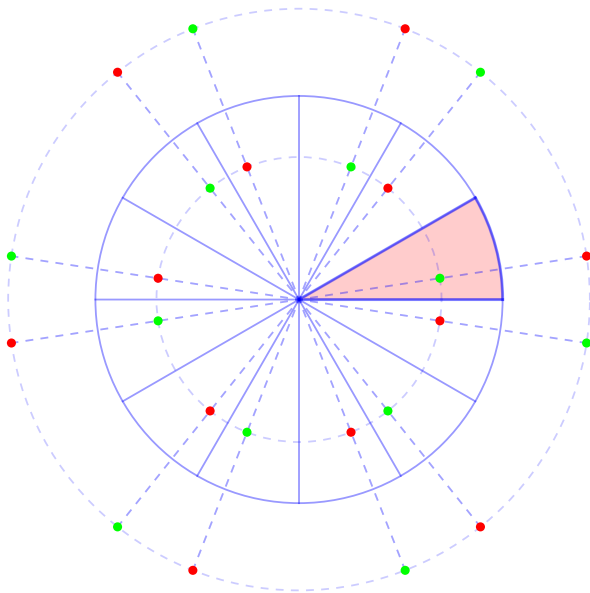


Abbildung 13.4: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Tortenstück.

13.4 Konforme Abbildungen in 2 Dimensionen

Definition 13.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Abbildung $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt winkeltreu, wenn für alle $p \in \Omega$ und jedes paar differenzierbare Kurven γ, ρ in Ω , die sich in p schneiden, die Bildkurven $h \circ \gamma$ und $h \circ \rho$ sich in $h(p)$ mit gleichem Winkel schneiden.

Also, wenn $\tilde{\gamma} = h \circ \gamma, \tilde{\rho} = h \circ \rho$ und $p = \gamma(t_\gamma) = \rho(t_\rho)$, dann gilt

$$\angle(\gamma'(t_\gamma), \rho'(t_\rho)) = \angle(\tilde{\gamma}'(t_\gamma), \tilde{\rho}'(t_\rho)).$$

Für $n \geq 3$ gibt es sehr wenige solche winkeltreue Abbildungen. Die einzigen nicht-affinen² Abbildungen enthalten da eine Inversion:

$$x \mapsto \frac{x}{|x|^2}.$$

In 2 Dimensionen gibt es viel mehr konforme Abbildungen und da ist es dann schon interessant. Meistens betrachtet man da nur die winkeltreuen Abbildungen, die eine positive Orientierung haben. Die Inversion in 2 Dimensionen hat keine positive Orientierung, aber mit einer zusätzlichen Spiegelung dann schon:

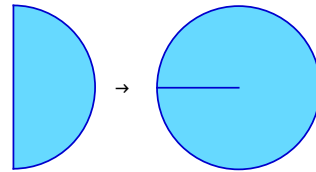
$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{(x_1, -x_2)}{|(x_1, x_2)|^2}.$$

²Affine Abbildungen sind Zusammenstellungen von Translationen, Drehungen, Spiegelungen und Skalierungen.

Aufgabe 13.2 Zeigen Sie, dass $D = \{(x, y) \in B_1(0); x > 0\}$ durch die Abbildung

$$h(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

bijektiv und winkeltreu auf der Einheitskreisscheibe mit einem Schlitz abgebildet wird.



Man findet

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'_1(t) \\ \tilde{\gamma}'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h_1 \circ \gamma)'(t) \\ (h_2 \circ \gamma)'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(\gamma(t)) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(\gamma(t)) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und für winkeltreue Abbildungen folgt, dass diese Matrix,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

wenn die Abbildung außerdem positiv orientiert ist, an jeder Stelle eine Drehskalierung sein muss:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \quad (13.20)$$

Hat man Funktionentheorie gehört, erkennt man hier die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

Lemma 13.10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und sei $h : \Omega \rightarrow h(\Omega)$ bijektiv und differenzierbar. Wenn h die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt, ist h konform auf Ω .

Für einfach zusammenhängende Gebiete in \mathbb{R}^2 kann man den Riemannschen Abbildungssatz verwenden. Dieser Satz besagt, dass es für jedes solche Gebiet Ω eine bikonforme Abbildung $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$ gibt, das heißt, h ist konform auf Ω und hat eine konforme Inverse auf $B_1(0)$.

Wenn der Rand von Ω eine Jordan-Kurve ist, dann kann man h erweitern zu einer bijektiven stetigen Funktion $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$.

Lemma 13.11 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega$ eine Jordan-Kurve und $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ eine bijektive stetige Abbildung, die konform von Ω auf $B_1(0)$ ist. Dann gilt

$$G_\Omega(x, y) = G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) \quad \text{für } x, y \in \Omega.$$

Bemerkung 13.11.1 Eine Jordan-Kurve ist eine injektive Kurve $\gamma : \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Bemerkung 13.11.2 Der Riemannsche Abbildungssatz besagt zwar, dass es immer so eine bikonforme Abbildung gibt, aber nicht gerade, ob und wie man diese Abbildung berechnen kann. Schwarz und Christoffel³ waren zwei Mathematiker, die sich beschäftigt haben mit expliziten Konstruktionen solcher Abbildungen, die heute dann auch bekannt sind als Schwarz-Christoffel Abbildungen.

Beweis. Man findet mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in (13.20), dass für $(x, y) \in \Omega$ und $u \in$

³Elwin Bruno Christoffel, Monschau 1829 – Straßburg 1900, Schüler am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium in Köln

$C^2(B_1(0))$ und $h \in C^2(\Omega; B_1(0))$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ h) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (u \circ h) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (u \circ h) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} u_1 \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial x} u_2 \circ h \right) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} u_1 \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial y} u_2 \circ h \right) \\
&= \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 u_{11} \circ h + 2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} u_{12} \circ h + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 u_{22} \circ h \\
&\quad + \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial x} u_1 \circ h + \frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial x} u_2 \circ h + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 u_{11} \circ h \\
&\quad + 2 \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} u_{12} \circ h + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 u_{22} \circ h \\
&\quad + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y \partial y} u_1 \circ h + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y \partial y} u_2 \circ h \\
&= \left(\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 \right) u_{11} \circ h + \\
&\quad \left(\left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 \right) u_{22} \circ h + \\
&\quad 2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) u_{12} \circ h + \\
&\quad (\Delta h_1) u_1 \circ h + (\Delta h_2) u_2 \circ h. \quad (13.21)
\end{aligned}$$

Aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\
\left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\
\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}$$

und $\Delta h_1 = 0 = \Delta h_2$. Kombinieren wir dies mit (13.21) so folgt

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ h) &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) ((\Delta u) \circ h) \\
&= J_h (\Delta u) \circ h. \quad (13.22)
\end{aligned}$$

Hier ist J_h genau die Jacobi-Matrix zu der Abbildung h , die man bei der Integraltransformation durch h finden würde.

Im oberen Abschnitt waren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ Koordinaten innerhalb von Ω . Nächstens werden wir wieder mit $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ Koordinatenpaare in Ω beschreiben.

Setzt man

$$v(x) = \int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) f(y) dy \text{ für } x \in \Omega,$$

so folgt mit $\tilde{x} = h(x)$ und der Substitution $\tilde{y} = h(y)$, unter

Verwendung von (13.22), dass

$$\begin{aligned}
 -\Delta v(x) &= -\Delta_x \left(\int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) f(y) dy \right) \\
 &= -J_h(x) \Delta_{\tilde{x}} \left(\int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, h(y)) f(y) dy \right) \\
 &= J_h(x) (-\Delta_{\tilde{x}}) \left(\int_{\tilde{y} \in B_1(0)} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) f(h^{inv}(\tilde{y})) J_{h^{inv}}(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) \\
 &= J_h(x) f(h^{inv}(\tilde{x})) J_{h^{inv}}(\tilde{x}) = f(x).
 \end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile haben wir

$$-\Delta_{\tilde{x}} \int_{\tilde{y} \in B_1(0)} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) g(\tilde{y}) d\tilde{y} = g(\tilde{x})$$

benutzt, und für die letzte Zeile erinnert man sich, dass $J_h(x) = (J_{h^{inv}}(h(x)))^{-1}$.

Weil $x \in \partial\Omega$ durch h auf $\partial B_1(0)$ abgebildet wird, ist auch die Randbedingung erfüllt:

$$G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } y \in \Omega.$$

Anders gesagt, es gilt $G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) = G_{\Omega}(x, y)$. ■

Es folgt, dass wenn man eine bikonforme Abbildung $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$ kennt, man die Randwertprobleme

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -\Delta u = \tilde{f} & \text{in } B_1(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (13.23)$$

ineinander überführen kann durch

$$u = v \circ h^{inv} \text{ und } \tilde{f} = J_{h^{inv}}(\cdot) (f \circ h^{inv})(\cdot),$$

beziehungsweise

$$v = u \circ h \text{ und } f = J_h(\cdot) (\tilde{f} \circ h)(\cdot).$$

Bemerkung 13.11.3 In höheren Dimensionen gibt es nur sehr wenige konforme Abbildungen, nämlich nur die Abbildungen sind konform, die sich zusammensetzen lassen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (orthogonale Abbildungen), Skalierungen und Inversionen. Inversionen sind genau die Kelvin-Spiegelungen. Außerdem gilt dies in höheren Dimensionen (13.22) so nicht.

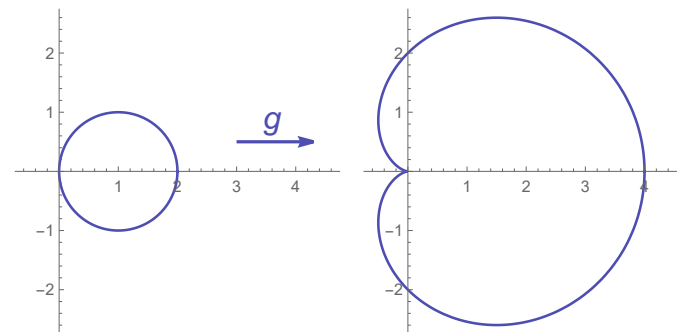


Abbildung 13.5: Kardioide als Bild vom Kreis

Aufgabe 13.3 Die Kardioide K findet man, wenn man das Bild von der Einheitskreisscheibe mit $(1,0)$ als Zentrum unter $g(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$ betrachtet. Geben Sie die Greensche Funktion an für

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) & \text{für } x \in K, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial K. \end{cases}$$

Aufgabe 13.4 Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Die Funktion

$$h_\alpha(x_1, x_2) = (\operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^\alpha, \operatorname{Im}(x_1 + ix_2)^\alpha)$$

erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen und man kann Sie verwenden, um eine Greensche Funktion für ein beliebiges Tortenstück T , wie in Beispiel 13.8, zu finden. Wenn das Tortenstück den Winkel $\beta \in (0, 2\pi)$ hat, welches α nehmen Sie und mit der Greenschen Funktion für welches Gebiet fangen Sie an?

Aufgabe 13.5 Geben Sie 2 Ansätze, wie man eine Greensche Funktion für (13.2) konstruieren kann, wenn $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

13.5 Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel

Lemma 13.12 Sei u harmonisch auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, dass

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y \quad (13.24)$$

Bemerkung 13.12.1 Für $x = x_0$ finden wir den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen, Proposition 4.4:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (13.25)$$

Bemerkung 13.12.2 Man sieht, dass $G_{B_R(0)}(x, y) > 0$ für $(x, y) \in B_R(0) \times B_R(0)$ und auch, dass

$$K_{B_R(0)}(x, y) > 0 \text{ für } (x, y) \in B_R(0) \times \partial B_R(0).$$

Beweis. Weil

$$\nabla_y G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{-1}{\omega_n} \left(\frac{y - x}{|x - y|^n} - \frac{\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 y - x}{\left|\frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|x}\right|^n} \right)$$

folgt für $|y| = R$ und $\nu = R^{-1}y$, dass

$$-\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\left(1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^2\right) y}{|x - y|^n} \cdot \frac{y}{R} = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n}.$$

Die Greensche Funktion für $B_R(x_0)$ folgt aus (13.9), wenn man sie um x_0 verschiebt, das heißt

$$K_{B_R(x_0)} = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n |x - y|^n},$$

und mit Proposition 13.5 folgt das Lemma. ■

13.5.1 Das starke Maximum-Prinzip

Theorem 13.13 (Das starke Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen) Sei u harmonisch auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wenn u ein Maximum oder Minimum innerhalb hat, dann ist u konstant.

Beweis. Nehmen wir an, u hat ein Maximum in $x_0 \in \Omega$. Aus dem Mittelwertsatz, Lemma 13.12 mit $x = x_0$ folgt, dass $u = u(x_0)$ gilt auf jeder Kugel innerhalb Ω mit x_0 als Zentrum. Weil Ω zusammenhängend ist, kann man für jedes x^* einen Weg innerhalb Ω finden, der x_0 mit x^* verbindet, und das Ergebnis folgt, wenn man diesen Weg mit passenden Kugeln überdeckt. ■

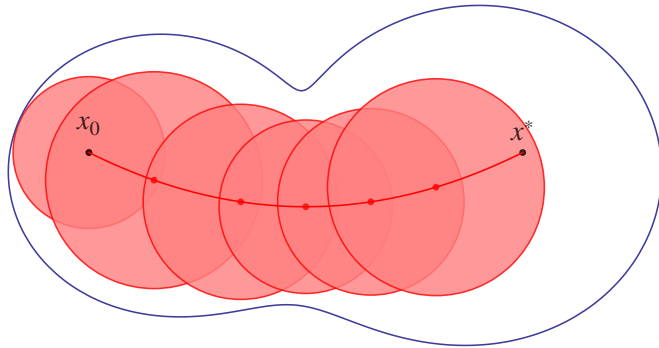


Abbildung 13.6: Man argumentiert von Kugel zu Kugel.

Korollar 13.14 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $u \in C(\bar{\Omega})$ harmonisch innerhalb Ω . Dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum an auf $\partial\Omega$.

Beweis. Eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}$ hat ein Maximum (und ein Minimum) und wegen des letzten Theorems kann es nicht im Innern liegen. ■

Korollar 13.15 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann hat

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.26)$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Beweis. Wenn es zwei Lösungen gäbe, verwende man das letzte Korollar für die Differenz beider Lösungen. ■

Theorem 13.16 (Die Ungleichung von Harnack⁴ auf einer Kugel) Sei u harmonisch und positiv auf $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\frac{(R - |x|) R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{(R + |x|) R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

Beweis. Man verwendet für den Integralkern in (13.24) mit $x_0 = 0$, dass für $|y| = R$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} &= \frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^n} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^n} = \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Kombiniert man (13.24) mit $x_0 = 0$, (13.27) und

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y$$

und die Annahme, dass $u \geq 0$ gilt, so folgt das Ergebnis. ■

Aufgabe 13.6 Beweisen Sie mit Theorem 13.16, dass eine positive harmonische Funktion auf \mathbb{R}^n konstant ist. Hinweis: $R \rightarrow \infty$.

Theorem 13.17 (Die Ungleichung von Harnack) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei u positiv und harmonisch innerhalb Ω . Dann gibt es für jede zusammenhängende offene Teilmenge A mit $\bar{A} \subset \Omega$ eine Konstante c_A derart, dass

$$\sup_{x \in A} u(x) \leq c_A \inf_{x \in A} u(x).$$

⁴Carl Gustav Axel Harnack, Tartu (damals Russland, heute Estland) 1851 – Dresden 1888.

Beweis. Weil \bar{A} kompakt ist und u stetig ist in Ω , gibt es $x_0, x^* \in \bar{A}$ mit

$$u(x_0) = \inf_{x \in A} u(x) \text{ und } u(x^*) = \sup_{x \in A} u(x).$$

Weil A zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve, die x_0 mit x^* innerhalb von A verbindet. Man nehme auf diese Kurve Punkte $x_1, \dots, x_k = x^*$ derart, dass $|x_i - x_{i+1}| < r$ für $i = 1, \dots, k$ und derart, dass $\bigcup_{i=0}^k \overline{B_{2r}(x_i)} \subset \Omega$ für ein $r > 0$. Dass so etwas geht, folgt aus der Kompaktheit. Durch Anwendung von Theorem 13.16 auf $B_{2r}(x_i)$ findet man, dass

$$u(x_{i+1}) \leq \frac{(r + \frac{1}{2}r) r r^{n-2}}{(r - \frac{1}{2}r)^{n-1}} u(x_i) = 3 \cdot 2^{n-2} u(x_i).$$

Nach k Schritte folgt $u(x^*) \leq (3 \cdot 2^{n-2})^k u(x_0)$ und das gewünschte Ergebnis. ■

13.5.2 Harmonisch auf Kugeln

Lemma 13.18 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei u harmonisch auf Ω . Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es $C_{k,n}$ derart, dass

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_{k,n}}{\omega_n r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy$$

für jede Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$ und $k = |\alpha|$ mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Beweis. Für $|\alpha| = 0$ folgt diese Aussage aus dem Mittelwertsatz. Durch Lemma 13.12 gilt

$$u(x) = \frac{(\frac{1}{2}r)^2 - |x - x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

und wenn man $x \in B_{r/4}(x_0)$ nimmt, gilt

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &= \sum_{\beta \leq \alpha} \left| D_x^\beta \left(\frac{(\frac{1}{2}r)^2 - |x - x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \right) \right| \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \left| D_x^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{|x-y|^n} \right) \right| |u(y)| d\sigma_y \\ &\leq C_{|\alpha|} \sum_{\ell \leq 2} r^{1-\ell} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{1}{r^{n+|\alpha|-\ell}} |u(y)| d\sigma_y \\ &\leq C'_{|\alpha|} r^{-|\alpha|} \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))}. \end{aligned} \tag{13.28}$$

Aus (4.14) folgt für $z \in \partial B_{r/2}(x_0)$, dass $B_{r/2}(z) \subset B_r(x_0)$ und

$$\begin{aligned} |u(z)| &= \left| \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_{r/2}(z)} u(y) dy \right| \\ &\leq \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy. \end{aligned} \tag{13.29}$$

Kombiniert man (13.28) und (13.29) so folgt das Ergebnis. ■

Theorem 13.19 (Liouville⁵) Wenn u harmonisch und beschränkt ist auf \mathbb{R}^n , dann ist u konstant.

Beweis. Aus dem letzten Lemma folgt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C_1}{R^{n+1}} \int_{B_R(x)} |u(y)| dy$$

und wenn u beschränkt ist, folgt $|\nabla u(x)| \leq C_1 \omega_n \|u\|_\infty R^{-1}$ für alle $R > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Das bedeutet $|\nabla u(x)| = 0$ und u ist konstant. ■

⁵Joseph Liouville, Französischer Mathematiker, 1809 – 1882

Proposition 13.20 Sei $G_{B_R(0)}$ die Greensche Funktion für $B_R(0)$ wie in (13.9) und sei $K_{B_R(0)}(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y)$. Dann ist

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in \partial B_R(0), \\ \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(0), \end{cases}$$

die eindeutige Lösung in $C(\overline{B_R(0)}) \cap C^\infty(B_R(0))$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_R(0), \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_R(0), \end{cases} \quad (13.30)$$

für $\varphi \in C(\partial B_R(0))$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. Die Tatsache, dass

$$\Delta K_{B_R(0)}(x, y) = 0 \text{ für } x \in B_R(0)$$

kontrolliert man direkt; singuläre Stellen von $x \mapsto K_{B_R(0)}(x, y)$ findet man nur für $x \in \partial B_R(0)$. Man soll nur noch beweisen, dass u stetig ist beim Rand. Dazu bemerkt man erst, dass

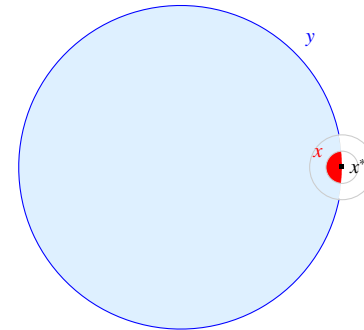
$$\int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y = 1.$$

Diese Identität folgt aus der Darstellungsformel, weil $u(x) = 1$ eine Lösung ist von (13.30) mit $\varphi = 1$. Sei nun $x_* \in \partial B_R(0)$ und sei $\delta > 0$ derart, dass

$$y \in \partial B_R(0) \text{ und } |x_* - y| < \delta \implies |\varphi(x_*) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_*)| &= |u(x) - \varphi(x_*)| \\ &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x_*)) d\sigma \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| < \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + \\ &\quad 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + \\ &\quad 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n} d\sigma_y = (*). \end{aligned}$$



Wenn $|x - x_*| < \frac{1}{2}\delta$ und $|x_* - y| \geq \delta$ gilt, folgt

$$|x - y| \geq |x_* - y| - |x - x_*| \geq \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$$

und

$$\begin{aligned}
 (*) &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n \left(\frac{1}{2}\delta\right)^n} d\sigma_y \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Weil $(R^2 - |x|^2) = (R + |x|)(R - |x|) \leq 2R(|x_*| - |x|) \leq 2R|x - x_*|$ gilt, können wir x genügend nahe an x_* nehmen um $2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$ beliebig klein zu bekommen. Genügend klein wie zum Beispiel $|u(x) - u(x_*)| < 2\varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist u stetig in x_* . ■

Theorem 13.21 Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^n und sei $u \in C(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

- u ist harmonisch.
- für alle $B_R(x)$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ gilt

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y.$$

Beweis. Die eine Richtung ist der Mittelwertsatz. Für die andere Richtung verwenden wir, dass wir eine Lösungsformel haben für harmonische Funktionen auf Kugeln bei vorgeschriebenen stetigen Randwerten. Das heißt, für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ ist

$$w(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

harmonisch innerhalb $B_R(x_0)$ und stetig auf $\overline{B_R(x_0)}$.

Man hat also $w - u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ und sogar

$$w(x) - u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(x_0). \quad (13.31)$$

Dann hat $w - u$ die folgende Mittelwerteigenschaft auf jeder Sphäre $\partial B_r(x_*)$ innerhalb $B_R(x_0)$:

$$w(x_*) - u(x_*) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_*)} (w(y) - u(y)) d\sigma_y,$$

und das bedeutet, dass $w - u$ kein Extrem in x_* haben kann. Anders gesagt, die Funktion $w - u$ kann ihr Maximum und Minimum nur auf dem Rand $\partial B_R(x_0)$ annehmen. Wegen (13.31) bedeutet es $w = u$ auf $\overline{B_R(x_0)}$ und dass u harmonisch ist. ■

Korollar 13.22 Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^n und seien $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ harmonisch auf Ω . Wenn u_k lokal gleichmäßig zu u konvergiert, so ist auch u harmonisch auf Ω .

Beweis. Wenn $u_k \rightarrow u$ konvergiert, dann gilt für jede Kugel in Ω , dass

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u_k(y) d\sigma_y \\
 &= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(y) d\sigma_y \\
 &= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y.
 \end{aligned}$$

Wegen Theorem 13.21 ist u harmonisch. ■

Korollar 13.23 Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^n und seien $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ harmonisch auf Ω . Nehme an, dass die Funktionen lokal gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert und die harmonisch ist auf Ω .

Beweis. Lemma 13.18 zeigt, dass auf jeder Kugel $B_R(x_1)$ mit $\overline{B_R(x_1)} \subset \Omega$ die Ableitungen ∇u_k gleichmäßig beschränkt sind. Wegen der Offenheit von Ω gibt es $r_1 > 0$ mit $B_{R+2r_1}(x_1) \subset \Omega$ und man wende das Ergebnis an auf $B_{r_1}(x_0)$ für $x_0 \in \overline{B_R(x_1)}$. Dann folgt, dass die u_k gleichgradig stetig sind auf $\overline{B_R(x_1)}$. Der Satz von Arzelá-Ascoli besagt, dass es eine konvergente Teilfolge gibt. Korollar 13.22 liefert die gewünschte Teilfolge. ■

Aufgabe 13.7 Wir betrachten die Funktionen $u_k : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$u_k(r \cos \varphi, r \sin \varphi) := r^k \cos(k\varphi).$$

1. Zeigen Sie, $u_k(1, 0) = 1$.
2. Zeigen Sie, u_k ist stetig auf $B_1(0)$.
3. Zeigen Sie, u_k ist harmonisch auf $B_1(0)$.
4. Zeigen Sie, u_k ist gleichmäßig beschränkt auf $B_1(0)$.
5. Zeigen Sie, u_k konvergiert auf $B_1(0)$.
6. Ist diese Konvergenz gleichmäßig auf $B_1(0)$?