

## Existenz nach Perron

### 14.1 Das Theorem von Perron

Wie schon angekündigt liefert die Methode von Perron für

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (14.1)$$

eine Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , angenommen  $\varphi$  ist stetig und  $\Omega$  genügend „nett“. Wir haben auch gesehen, dass  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  kein nettes Gebiet ist. Es wird Zeit für eine Bedingung, die uns  $\Omega$  genügend nett sein läßt.

**Bedingung 14.1** *Ein Gebiet  $\Omega$  erfüllt die äußere Kugelbedingung, wenn es für jedes  $x^* \in \partial\Omega$  eine Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  gibt mit  $x^* \in \partial B$ .*

**Bemerkung 14.1.1** *Diese äußere Kugelbedingung läßt sich leicht als ausreichende Bedingung verwenden. Tatsächlich kann man diese Bedingung abschwächen. Eine äußere Kegelbedingung (e statt u!) reicht auch. Leider wird der Beweis aufwendiger.*

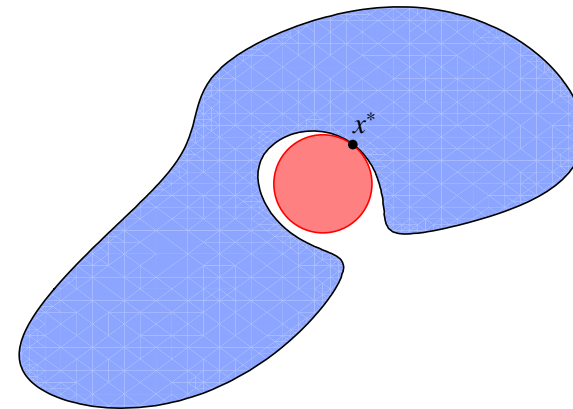


Abbildung 14.1: Die äußere Kugelbedingung.

**Bemerkung 14.1.2** *Isolierte Punkte als Teil des Randes erfüllen klar weder die äußere Kugelbedingung noch eine äußere Kegelbedingung. Derartige Ränder sind jedoch nicht die einzigen, die Schwierigkeiten bereiten. Henri Lebesgue hat gezeigt, dass es auch zusammenhängende Ränder gibt, die keine Lösung in  $C(\bar{\Omega})$  zulassen. Sein Gegenbeispiel in drei Dimensio-*

nen in der Form einer hineingerichteten Spitze ist als das „Lebesgue thorn“ bekannt geworden.

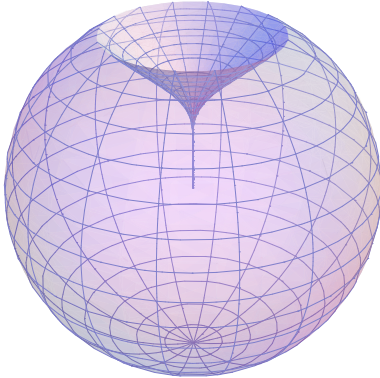


Abbildung 14.2: Bild einer Kugel mit einem „Lebesgue thorn“. Das Horn (oder der Dorn) ist hier wie folgt definiert:  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < \exp(-1/z) \text{ für } z > 0\}$ . Also gilt  $\Omega = B_1(0) \setminus D$ .

**Aufgabe 14.1** Wir setzen  $u(x, y, z) := 1 + z \ln(x^2 + y^2)$ .

1. Berechnen Sie  $\Delta u(x, y, z)$ .
2. Zeigen Sie, dass  $u(x, y, z) < 0$  genau dann, wenn  $(x, y, z) \in D$  mit  $D$  dem Lebesguen Thorn.
3. Ist  $u$  eine positive harmonische Funktion auf  $\Omega$  von Abbildung 14.2?

**Theorem 14.2 (Perron)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt. Dann gibt es für jedes  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  eine eindeutige Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  zu (14.1).

## 14.2 Minimum und Infimum bei superharmonisch

Man definiert

$$S_\varphi(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) ; \begin{array}{l} u \text{ superharmonisch in } \Omega \\ u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

und sucht die Lösung durch

$$u(x) := \inf \{ v(x) ; v \in S_\varphi(\bar{\Omega}) \}.$$

Wir werden das Theorem in mehreren Schritten beweisen.

**Lemma 14.3**  $S_\varphi(\bar{\Omega})$  ist nicht leer und für  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  gilt  $u(x) \geq \min \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$ .

**Beweis.** Weil  $\varphi$  stetig ist auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge, existiert  $\min \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$  und  $\max \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$ . Die Konstante  $m = \max \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$  liefert eine konstante Funktion in  $S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Weiter gilt es, dass

$$u(x) \geq \min \{ u(x) ; x \in \partial\Omega \} \geq \min \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \},$$

weil eine superharmonische Funktion ihr Minimum am Rand annimmt. ■

**Lemma 14.4** Sei  $u_1, u_2 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und definiere

$$u(x) = \min(u_1(x), u_2(x)).$$

Dann gilt  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 14.4.1** Durch wiederholte Anwendung folgt auch:  $u_1, \dots, u_k \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  impliziert

$$x \mapsto \min(u_1(x), \dots, u_k(x)) \in S_\varphi(\bar{\Omega}).$$

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und nehme an,  $u(x_0) = u_1(x_0)$ . Dann gilt für  $B_r(x_0) \subset \Omega$ , dass

$$\begin{aligned} u(x_0) = u_1(x_0) &\geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u_1(y) d\sigma_y \\ &\geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Die Bedingung  $u \geq \varphi$  ist direkt erfüllt. ■

**Aufgabe 14.2** Ist die Funktion  $(x, y) \mapsto |x + y| + |x - y|$  sub- oder superharmonisch auf  $\mathbb{R}^2$ ?

**Lemma 14.5** Sei  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$ . Definiere

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus B_R(x_0), \\ \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(x_0). \end{cases} \quad (14.2)$$

Dann gilt  $\tilde{u} \leq u$  und  $\tilde{u} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 14.5.1** Die Änderung einer superharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \leq u$  nennt man „harmonic lowering“ von  $u$ . Besser bekannt ist die ähnliche Änderung einer subharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \geq u$ , die als „harmonic lifting“ von  $u$  bezeichnet wird.

**Beweis.** Die Funktion  $u - \tilde{u}$  ist superharmonisch und identisch 0 auf  $\partial B_R(x_0)$ . Wegen Proposition 13.20 ist  $\tilde{u}$  und darum auch  $u - \tilde{u}$  stetig. Es folgt  $u - \tilde{u} \geq 0$  in  $B_R(x_0)$ . Außerhalb gilt  $u - \tilde{u} = 0$ . ■

**Proposition 14.6** Sei  $\Omega$  beschränkt und  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Dann ist die Funktion

$$u(x) := \inf \{v(x); v \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}. \quad (14.3)$$

harmonisch.

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S_\varphi(\bar{\Omega})$  derart, dass  $u_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ . Setzen wir

$$U_k(x) := \min \{u_1(x), \dots, u_k(x)\},$$

so ist  $\{U_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge für alle  $x \in \Omega$ . Sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$  und definiere  $\tilde{U}_k$ , wie in (14.2). Auf  $B_R(x_0)$  sind die Funktionen  $\tilde{U}_k$  harmonisch. Korollar 13.23 liefert eine Teilfolge, die gegen eine harmonische Funktion  $U$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  konvergiert. Aus dieser Konstruktion folgt  $U(x_0) = u(x_0)$  und  $U(x) \geq u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Wir wollen zeigen, dass  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Nehmen wir an, dass es  $x_1 \in B_{R/2}(x_0)$  gibt mit  $U(x_1) > u(x_1)$ . Dann gibt es  $v \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  mit

$$U(x_1) > v(x_1) \geq u(x_1). \quad (14.4)$$

Ähnlich wie vorhin betrachten wir

$$V_k(x) := \min \{v(x), u_1(x), \dots, u_k(x)\}$$

und finden eine harmonische Funktion  $V$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  mit

$$U(x_0) = V(x_0)$$

und  $U(x) \geq V(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Dann folgt aus der Mittelwerteeigenschaft, Proposition 4.4, dass  $U = V$  auf  $\overline{B_{R/2}(x_0)}$  im Widerspruch zu (14.4). Also gilt  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ , und  $u$  ist harmonisch in  $B_{R/2}(x_0)$ . Weil  $x_0$  beliebig ist, ist  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . ■

### 14.3 Beweis mit Barrieren am Rand

Wir müssen noch zeigen, dass diese Lösung  $u$  stetig auf  $\bar{\Omega}$  ist. Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$ , dann folgt aus dem Maximum Prinzip, dass die Lösung eindeutig ist.

**Definition 14.7** Eine Funktion  $b \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ , wenn

1.  $b$  ist superharmonisch in  $\Omega$ ;
2.  $b(x^*) = 0$ ;
3.  $b(x) > 0$  für  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{x^*\}$ .

**Lemma 14.8** Wenn  $\Omega$  die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ , dann existiert eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ .

**Beweis.** Sei  $B_r(x_1)$  eine solche Kugel. Dann definiere für  $n \geq 3$  die Funktion

$$b(x) = r^{2-n} - |x - x_1|^{2-n}.$$

Die Funktion ist sogar harmonisch. Die beiden anderen Eigenschaften in Definition 14.7 zeigt man direkt.

Für  $n = 2$  setzt man

$$b(x) = \log|x - x_1| - \log r$$

als Barrierenfunktion. ■

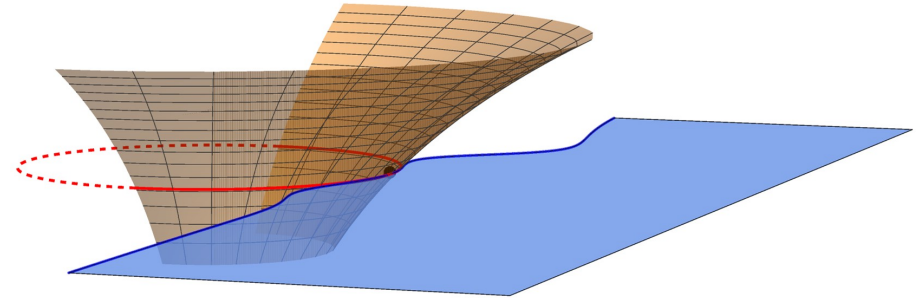


Abbildung 14.3: Barrierenfunktion an einem Randpunkt vom blauen  $\Omega$  mit in rot  $\partial B_r(x_0)$

**Aufgabe 14.3** Zeigen Sie, dass für  $\Omega = B_1(0)$  an jedem Randpunkt  $x_0$  die Funktion

$$f(x) = 1 - x \cdot x_0$$

eine Barrierenfunktion ist.

In zwei Dimensionen kann man Barrierenfunktionen konstruieren, die lokal nur eine äußere Kugelbedingung voraussetzen mit Hilfe der Funktionen, die in Abbildung 2.2 dargestellt sind.

**Proposition 14.9** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ . Dann gilt für die Funktion  $u$  in (14.3), dass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \in \Omega}} u(x) = \varphi(x^*). \quad (14.5)$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\delta > 0$  derart, dass

$$|x - x^*| < \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies |\varphi(x) - \varphi(x^*)| < \varepsilon.$$

Man nehme  $k_1 > 0$  derartig, dass

$$|x - x^*| \geq \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies k_1 b(x) > \varphi(x) - \varphi(x^*).$$

Dann gilt für die Funktion  $\bar{w}$ , definiert durch

$$\bar{w}(x) := \varphi(x^*) + \varepsilon + k_1 b(x)$$

dass  $\bar{w} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Es gilt also, dass

$$u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (14.6)$$

Auf ähnliche Art kann man auch eine harmonische Funktion  $n(x)$  finden durch

$$n(x) := -\inf \{v(x); v \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\}. \quad (14.7)$$

Für  $v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und  $v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})$  folgt  $v_1 + v_2 \in S_0(\bar{\Omega})$  und weil  $v_1 + v_2$  superharmonisch ist, dass  $v_1 + v_2 \geq 0$  auf  $\bar{\Omega}$ . Anders gesagt

$$v_1 \geq -v_2 \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Es folgt dann auch, dass für  $x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} u(x) &= \inf \{v_1(x); v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})\} \\ &\geq \sup \{-v_2(x); v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\} = n(x). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Auch hier kann man zeigen, dass es  $k_2 > 0$  gibt mit der Funktion

$$\underline{w}(x) := \varphi(x^*) - \varepsilon - k_2 b(x)$$

derart, dass

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (14.9)$$

Aus (14.6-14.8-14.9) folgt

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \leq u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}$$

und dass es  $\delta_1 > 0$  gibt so, dass für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $|x - x^*| < \delta_1$  folgt

$$|u(x) - \varphi(x^*)| < 2\varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon$  beliebig ist, ist (14.5) erfüllt. ■



## Laplace und Regularität

### 15.1 Bemerkungen zur Regularität

Wir haben gezeigt, dass es für  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einer äußeren Kugelbedingung, eine Lösung  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  gibt zu

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.1)$$

Wenn man vergleicht mit dem eindimensionalen Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial(a, b), \end{cases} \quad (15.2)$$

dann folgt für (15.2), dass für  $f \in C^1([a, b])$  die Lösung  $u$  sogar in  $C^3([a, b])$  liegt. Und wenn man nur  $f \in C([a, b])$  hat, folgt immer noch eine Lösung  $u \in C^2([a, b])$ . Ganz allgemein kann man für (15.2) direkt zeigen, dass  $f \in C^{k,\gamma}([a, b])$  eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}([a, b])$  ergibt.

Kann man ähnliches vielleicht auch für (15.1) erwarten? Eine extra Schwierigkeit hat man durch den Rand, der im eindimensionalen Fall sehr trivial ist. Wenn wir nun annehmen,

dass der Rand sehr schön ist, sagen wir  $\partial\Omega \in C^\infty$ , oder wenn wir vom Rand weg bleiben, gibt es dann ähnliches?

Die Perronsche Methode gibt uns eine Lösung zu (15.1) in zwei Schritten:

1. Man setzt

$$u_1(x) = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy \quad (15.3)$$

und bekommt für  $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , dass  $u_1 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  mit  $-\Delta u_1(x) = f(x)$  für  $x \in \Omega$ .

2. Man findet anschließend eine Lösung  $u_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  von

$$\begin{cases} -\Delta u_2(x) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2(x) = u_1(x) & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.4)$$

Die Funktion  $u = u_1 - u_2$  ist die Lösung von (15.1). Die Eindeutigkeit folgt dabei aus dem Maximum-Prinzip.

## 15.2 Regularität und Fundamentallösung

In Proposition 12.3 haben wir schon bewiesen, dass für  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  folgt, dass für  $w$ , definiert durch

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy, \quad (15.5)$$

gilt  $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Hier ist  $F_n$  die Fundamentallösung aus Definition 12.1. Wenn  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt, dann kann man wie folgt verfahren:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} w(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy = \\ &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) f(x-z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) \partial_{x_i} f(x-z) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \partial_{y_i} f(y) dy. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Man kann also eine Ableitung durch das Integralzeichen schieben.

Für  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\partial_i f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  und deshalb folgt aus Proposition 12.3 für (15.6), dass  $\partial_i w \in C^2(\mathbb{R}^n)$  gilt. Dies gilt für jedes  $i$ , also gilt  $w \in C^3(\mathbb{R}^n)$ . Man kann diese Schritte beliebig wiederholen und so folgt:

**Lemma 15.1** Sei  $k \in \mathbb{N}^+$ . Für  $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$  und  $w$  definiert in (15.5) gilt  $w \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ .

Mit mehr Mühe kann man sogar zeigen, dass für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$  gilt:

$$f \in C_0^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow w \in C^{k+2,\gamma}(\mathbb{R}^n).$$

Die Hölder-Stetigkeit der Lösung ist +2 besser als die Hölder-Stetigkeit der rechten Seite. Für  $C_0^k(\mathbb{R}^n)$  (oder  $C_0^{k,1}(\mathbb{R}^n)$ ) und Dimensionen  $n \geq 2$  gilt die Erhöhung der Differenzierbarkeit um 2 nicht:

$$f \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow w \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n).$$

Wir werden nun ein Beispiel geben, bei dem  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die Lösung von (15.1) nicht zweimal stetig differenzierbar ist.

**Beispiel 15.2** Die Funktion

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0), \end{cases}$$

ist eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in B_r(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_r(0), \end{cases} \quad (15.7)$$

mit  $r = 1/\sqrt{e}$  und

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4x_1 x_2 (1 - 2 \log(x_1^2 + x_2^2))}{(x_1^2 + x_2^2) (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktion  $f$  ist stetig auf  $\overline{B_r(0)}$ , denn die rationale Teilfunktion  $\frac{4x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$  ist beschränkt und der Logarithmus hoch 2 im Nenner sorgt für Konvergenz gegen 0 für  $x \rightarrow (0, 0)$ . Man kann auch zeigen, dass  $u \in C^{1,\gamma}(\overline{B_r(0)})$  für jede  $\gamma < 1$ . Die Funktion  $u$  ist aber nicht zweimal differenzierbar in  $(0, 0)$ . Die



zweite Ableitung von  $u$  nach zum Beispiel  $x_1$  ist nicht definiert in  $(0, 0)$  und unbeschränkt bei  $(0, 0)$ :

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} u(x_1, x_2) = \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) + \frac{2x_1^4 + 2x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \log(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2 (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} \quad (15.8)$$

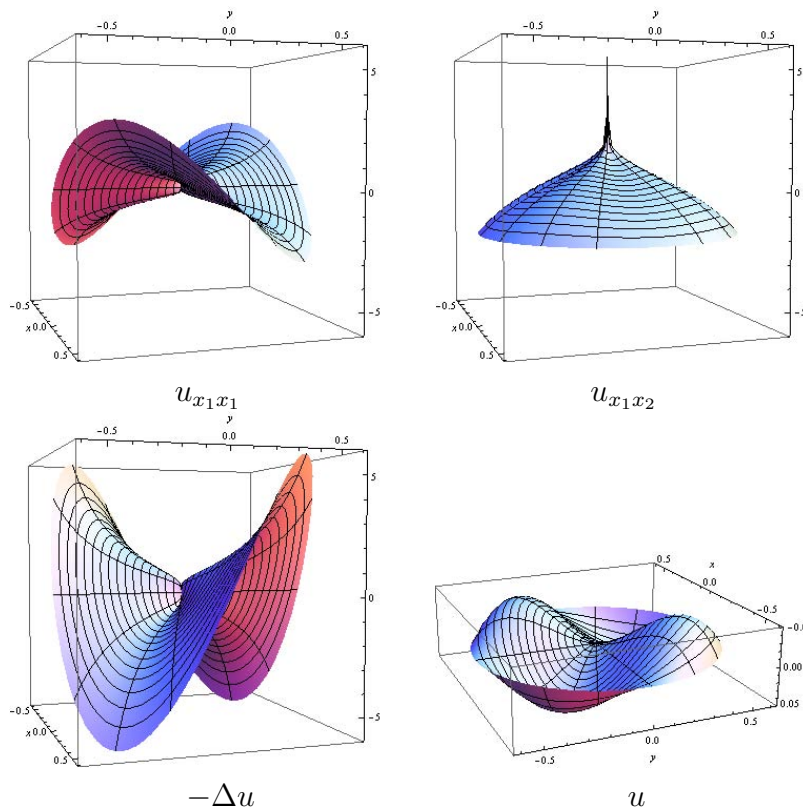


Abbildung 15.1: Skizzen zu den Funktionen aus Beispiel 15.2:

Von den drei Termen in (15.8) hat der erste eine Singularität in  $(0, 0)$ . Die zwei übrigen Termen kann man stetig durch 0 in  $(0, 0)$  fortsetzen.

Man kann sich noch fragen, ob denn dieses  $u$  tatsächlich die einzige Lösung zu (15.7) ist. Wenn es eine zweite Lösung  $u_2$  gäbe, dann betrachte man  $w = u - u_2$ . Das Maximumprinzip oder der Mittelwertsatz hat zwar als Voraussetzung, dass  $w \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ , doch man kann zeigen, dass  $w \in W^{2,p}(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$  mit  $p$  groß reicht. Es folgt so, dass  $w = 0$ .

**Aufgabe 15.1** Zeigen Sie, dass die Funktion  $v : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$v(x) = \begin{cases} x^2 \log(-\log(x)) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

in  $C^{1,\gamma}[0, \frac{1}{2}]$  liegt und nicht in  $C^2[0, \frac{1}{2}]$ .

### 15.3 Regularität und Rand

Um den soeben gezeigten Ansatz zu verwenden, müsste man  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf ( $k$  mal) stetig differenzierbare Art erweitern können.

**Lemma 15.3** Sei  $f \in C^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . Dann gibt es eine Erweiterung  $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis.** Man definiere für  $x_1 < 0$  und  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\tilde{f}(x_1, x') = \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x')$$

mit  $a_m$  bestimmt durch

$$1 = \sum_{m=1}^{k+1} (-m)^\ell a_m \text{ für } \ell \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (15.9)$$

Anders gesagt,  $a_m$  erfüllt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -m-1 \\ (-1)^2 & (-2)^2 & (-3)^2 & \cdots & (-m-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^k & (-2)^k & (-3)^k & \cdots & (-m-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Typ von Matrix ist nach Vandermonde benannt und bekanntlich invertierbar, wenn die zweite Zeile keine gleichen Zahlen enthält. Es gibt also eine eindeutige Lösung  $a_1, \dots, a_{k+1}$ . Wenn die Gleichungen in (15.9) erfüllt sind, findet man für  $\ell + |\alpha| \leq k$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \tilde{f}(0, x') &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \left( \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') \right) \\ &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(-mx_1, x') \\ &= \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x') = (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x'). \end{aligned}$$

Dann folgt, dass

$$\tilde{f}(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } x_1 \geq 0, \\ \tilde{f}(x_1, x') & \text{für } x_1 < 0, \end{cases}$$

eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion ist.  $\blacksquare$

**Beispiel 15.4** Eine  $C^1$ -Erweiterung von  $f \in C^1[0, \infty)$  wird auf diese Art definiert:

$$\tilde{f}(x) = a_1 f(-x) + a_2 f(-2x) \text{ für } x < 0,$$

und  $a_1, a_2$  werden bestimmt durch

$$f(0) = \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}(x) = (a_1 + a_2) f(0),$$

$$f'(0) = \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}'(x) = (-a_1 - 2a_2) f'(0).$$

Man löst  $1 = a_1 + a_2$  und  $1 = -a_1 - 2a_2$ , und man findet  $a_1 = 3$  und  $a_2 = -2$ .

**Aufgabe 15.2** Nennen wir die  $C^1$ -Erweiterung aus Beispiel 15.4  $E_1$  und die ähnlichen  $C^k$ -Erweiterungen  $E_k$ . Kann man  $E_{k+1}$  erstellen als Linearkombination von  $E_k$  und  $E_{k-1}$ ?

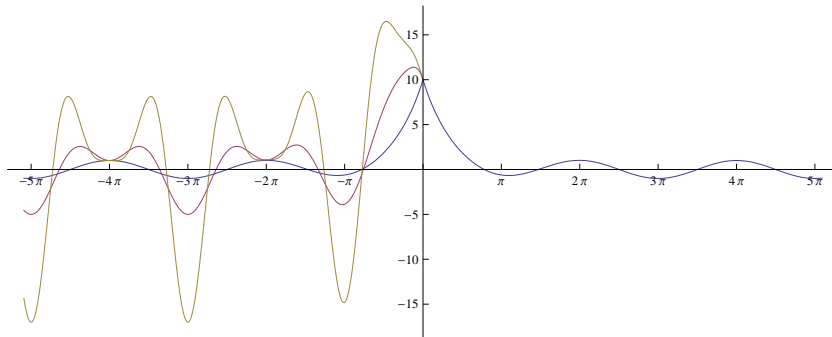


Abbildung 15.2: Die Funktion  $f(x) = 9e^{-x} + \cos(x)$  auf  $[0, \infty)$  und ihre  $C^0$ -,  $C^1$ - und  $C^2$ -Erweiterung auf  $\mathbb{R}^-$  in blau, purpur und gold.

Abbildung 15.2 zeigt, dass die Erweiterung bedeutend größer sein kann als die ursprüngliche Funktion. Man kann jedoch zeigen, dass diese Erweiterung beschränkt ist im geeigneten Raum.

Für den Operator  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$ , definiert durch

$$E_k(f)(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

mit  $a_m$  (anhängig von  $k$ ) als in (15.9), kann man nämlich folgendes zeigen:

**Lemma 15.5** *Es gibt  $C_k$  derart, dass für alle  $f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ :*

$$\|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_k \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})}.$$

Anders gesagt:  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$  ist ein beschränkter linearer Operator.

**Beweis.** Weil  $E_k(f) \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\begin{aligned} & \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|E_k(f)\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{m=1}^{k+1} |a_m| \sum_{\alpha_1 + |\alpha'| \leq k} \left\| (-m)^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x'}^{\alpha'} f \right\|_{\infty} \\ &\leq \left( 1 + (k+1) \max_{m \leq k+1} \{|a_m| m^k\} \right) \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \end{aligned}$$

für alle  $f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . ■

**Proposition 15.6** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$E_{k,\Omega} : C^k(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

mit  $E_{k,\Omega}(f)(x) = f(x)$  für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $f \in C^k(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Wir geben nur eine Skizze. Für  $\partial\Omega$  gibt es wie in Definition 2.10 beschrieben, eine Überdeckung des Randes mit Blöcken  $\{B_i\}_{i=1}^{\ell}$ . Sei  $\{\chi_i\}_{i=0}^{\ell}$  eine Zerlegung der Eins derart, dass  $\text{support}(\chi_i) \subset B_i$  für  $i = 1, \dots, \ell$ . Auf jedem dieser Blöcke kann man den Rand in lokalen Koordinaten beschreiben durch  $x_1^{(i)} = \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  und  $\Omega$  durch  $x_1^{(i)} > \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ . Weil  $\psi_i \in C^k$  kann man den Rand

glattbügeln durch

$$S_i \left( x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \right) = \left( x_1^{(i)} - \psi_i \left( x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \right), x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \right),$$

und lokal wird eine Funktion zu einer auf dem Halbraum transformiert durch

$$(S_i^* f)(y_1, y') = f(y_1 + \psi_i(y'), y').$$

Formal schreiben wir

$$E_{k,\Omega}(f) = \sum_{i=1}^{\ell} (S_i^*)^{-1} E_k S_i^* (\chi_i f)$$

und die Tatsache, dass diese Definition den gewünschten Erweiterungsoperator liefert, darf der Leser selbst überprüfen. Auch kann man sich davon überzeugen, dass  $E_{k,\Omega}(f)$  einen kompakten Träger hat, der nur abhängt von  $\{\chi_i\}_{i=1}^{\ell}$ . ■

**Korollar 15.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gilt für jedes  $f \in C^{k_1}(\bar{\Omega})$  mit  $k_1 \leq k$ , dass  $w \in C^{k_1+1}(\bar{\Omega})$  für

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) E_{k,\Omega}(f)(y) dy.$$

**Bemerkung 15.7.1** Für  $x \in \Omega$  gilt

$$-\Delta w(x) = E_{k,\Omega}(f)(x) = f(x).$$

Dies bedeutet, dass man eine Lösung von (15.1) bekommt, wenn man

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2 = w & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (15.10)$$

löst und  $u = w - u_2$  nimmt. Weil  $u_2 \in C^\infty(\Omega)$  gilt, folgt für  $f$  und  $\Omega$  wie in Korollar 15.7, dass  $u \in C^{k_1+1}(\Omega)$ . Möchte man sogar die Regularität einschließlich des Randes zeigen, kann man für Gebiete, die die äußeren Kugelbedingungen erfüllen, die Funktion  $u_2$  mit Oberlösungen und Unterlösungen annähern und mit Harnackschen Ungleichungen Abschätzungen erzeugen, die dafür sorgen, dass man  $u_2 \in C^1(\bar{\Omega})$  zeigen kann. Für höhere Regularität betrachtet man ein Problem wie (15.10) nun für  $\partial_{x_i} u_2$  usw.

## 15.4 Lösungen und Abschätzungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir einige Ergebnisse für Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (15.11)$$

in verschiedenen Rahmen. Um diese Ergebnisse zu beweisen wäre eine Spezialvorlesung nötig.

**Theorem 15.8** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  genau eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  zu (15.11).

Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,\gamma} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:

$$\|u\|_{C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Für einen Beweis schaue man nach in [7].

Wir haben in Abschnitt 12.2.2 bemerkt, aber nicht bewiesen, dass es bei einem beschränkten Gebiet  $\Omega$  für  $f \in L^2(\Omega)$  eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt zu (15.11). Eine schwache Lösung heißt hier:  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (15.12)$$

Der Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  wurde in (12.13) definiert. Die Sobolev-Räume  $W^{k,p}(\Omega)$  findet man in Abschnitt 3.3.1.

**Theorem 15.9** *Nehmen wir  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in (1, \infty)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Sei  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  die schwache Lösung vom Typ (3.7). Wenn zusätzlich  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  gilt, dann folgt  $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ .*

*Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,p} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  und für die dazugehörige Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{k+2,p}(\Omega)$  gilt:*

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p} \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Für einen Beweis schaue man bei [4, Seite 317] für  $p = 2$  oder in [7] für allgemeine  $p \in (1, \infty)$ .

Wie verhalten sich diese beiden Typen von Lösungen? Eine Richtung möge deutlich sein. Weil  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$  gilt für beschränkte Gebiete  $\Omega$  und dass es sogar  $c'_{\Omega,k,\gamma} > 0$  gibt mit

$$\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq c'_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} \text{ für alle } f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}),$$

findet man für  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  nicht nur  $u \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ , sondern auch  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Kann man auch in der umgekehrten Richtung eine Inklusion erwarten? Für  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  findet man

im Allgemeinen keine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  aber manchmal schon eine Lösung  $u \in C^{k+1,\gamma}(\bar{\Omega})$ . Die sogenannten Sobolev Einbettungen geben Antwort auf diese Art von Fragen.

Die Sobolevschen Einbettungssätze, die für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gelten, die eine **innere(!)** Kegelbedingung erfüllen, geben uns die folgenden Abschätzungen:

- Wenn  $k \geq m$  und  $k - \frac{n}{p} > m - \frac{n}{q}$  dann gilt

$$\|u\|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,q} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

- Wenn  $k - \frac{n}{p} > m + \gamma$  dann gilt

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Wenn man ganz genau wäre, müsste man bei der letzten Abschätzung eigentlich sagen, dass es für jede Äquivalenzklasse  $U \in W^{k,2}(\Omega)$  einen Vertreter  $u \in C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  gibt mit

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|U\|_{W^{k,2}(\Omega)}.$$

Man kann diese Ergebnisse kombinieren zur folgenden Aussage:

**Korollar 15.10** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  genau eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  zu (15.11). Außerdem gilt  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , und es gibt  $c_{\Omega} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:*

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega} \|f\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

**Beweis.** Wenn  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f \in L^p(\Omega)$  für alle  $p \in (1, \infty)$  also auch für  $p = 2$ . Dann gibt es genau eine schwache Lösung in  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , die sogar in  $W^{2,p}(\Omega)$  liegt für alle  $p \in (1, \infty)$ . Für  $p > n$  folgt, dass  $u \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})$  für  $\varepsilon \in (0, 1 - \frac{n}{p})$ . Die Abschätzungen folgen:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} &\leq \|u\|_{C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})} \leq c_1 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ &\leq c_2 \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3 \|f\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Die Konstanten hängen nur von  $\Omega$  und  $n$  ab. Man kann  $p = 2n$  und  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  wählen. ■

Diese Überlegungen führen dazu, dass man für  $f \in C(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \in C^3$  nur eine Lösung  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  findet, und im Allgemeinen nicht in  $C^2(\bar{\Omega})$ . Das bedeutet, dass man eine Gleichung  $-\Delta u = f$  nicht punktweise

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \Omega$$

lesen soll, sondern nur

$$-\Delta u = f \text{ fast überall in } \Omega.$$

## Semilineare Laplace-Gleichungen

### 16.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip

In diesem Abschnitt betrachten wir

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (16.1)$$

mit  $c \in C(\bar{\Omega})$ .

**Theorem 16.1 (Starkes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (16.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass entweder  $u > 0$  in  $\Omega$  oder  $u = f = 0$  in  $\Omega$ .

Wir werden diese Aussage in mehreren Schritten beweisen. Das erste Ergebnis ist eine schwächere Version des obigen Theorems.

**Proposition 16.2 (Schwachtes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (16.1) und  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass  $u \geq 0$  in  $\Omega$ .

**Beweis.** Nehmen wir an, dass  $\min u = u(x_0) < 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gibt es eine Kugel  $B_r(x_0)$  mit  $u(x) < 0$  für alle  $x \in B_r(x_0)$ . Wir können  $r$  sogar so groß wählen, dass es  $x_1 \in \partial B_r(x_0)$  gibt mit  $u(x_1) = 0$ . Es folgt auch, dass

$$f(x) - c(x)u(x) \geq 0 \text{ auf } B_r(x_0)$$

und damit, dass  $u$  superharmonisch ist auf  $B_r(x_0)$ . Wir finden einen Widerspruch zu  $u(x_1) = 0$ . Also folgt  $u \geq 0$  in  $\Omega$ . ■

**Lemma 16.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  eine nichtnegative Funktion. Wenn es  $x_0, x_1 \in \Omega$  gibt mit  $u(x_0) > 0 = u(x_1)$ , dann gibt es  $x_4, x_5 \in \Omega$  und  $R > 0$  mit

1.  $u(x_4) = 0$  und  $x_4 \in \partial B_R(x_5)$ ;
2.  $u(x) > 0$  für  $x \in \overline{B_R(x_5)} \setminus \{x_4\}$ ;
3.  $B_{2R}(x_4) \subset \Omega$ .

**Beweis.** Weil  $\Omega$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = x_0$  und  $\gamma(1) = x_1$ . Setze

$$t_2 = \inf \{t \in [0, 1]; u(t) = 0\} \text{ und } x_2 = \gamma(t_2).$$

Weil  $x_2 \in \Omega$  und  $\Omega$  offen ist, gibt es  $R_2 > 0$  mit  $B_{R_2}(x_2) \subset \Omega$ . Setze

$$t_3 = \inf \{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in B_{R_2/2}(x_2)\} \text{ und } x_3 = \gamma(t_3).$$

Es gilt  $t_3 < t_2$  und  $u(x_3) > 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gilt  $u(x) > 0$  in einer Umgebung von  $x_3$  und

$$R_3 = \sup \{r \in [0, R_2/2]; u(x) > 0 \text{ auf } B_r(x_3)\}$$

ist derart, dass es  $x_4 \in \partial B_{R_3}(x_3)$  gibt mit  $u(x_4) = 0$ . Für  $x \in B_{R_3}(x_3)$  gilt  $u(x) > 0$ . Um zu verhindern, dass es mehrere Stellen auf  $\partial B_{R_3}(x_3)$  gibt, wo  $u(x) = 0$  gilt, brauchen wir noch einen Schritt. Setze  $x_5 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$  und  $R = \frac{1}{2}R_3$ . ■

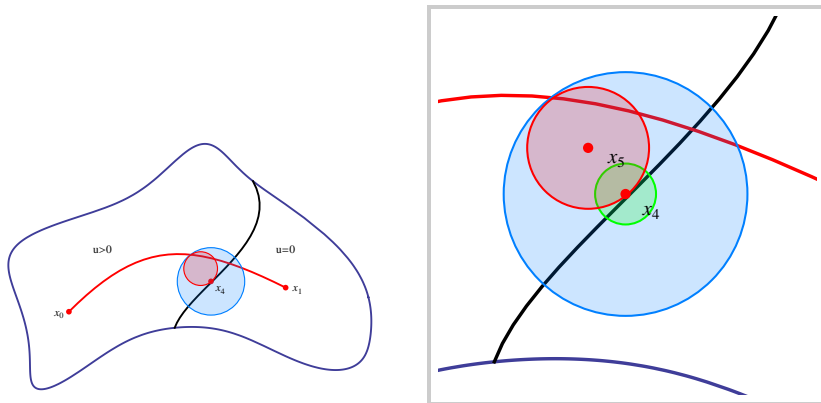


Abbildung 16.1: Die Konstruktion in Lemma 16.3 mit Detailansicht.

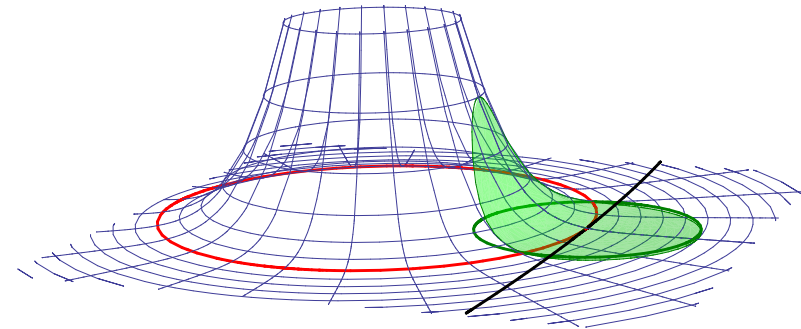


Abbildung 16.2: Die Hilfsfunktion aus dem Beweis zu Theorem 16.1. Die Funktion  $v$  ist mit dem blauen Gitter dargestellt; die Einschränkung von  $v$  auf  $B_{R/2}(x_4)$  ist grün.

**Beweis von Theorem 16.1.** Sei  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (16.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$ . Wegen des schwachen Maximum-Prinzips gilt  $u \geq 0$  auf  $\Omega$ . Wir nehmen an, es gibt  $x_0, x_1 \in \Omega$  mit  $u(x_0) > 0$  und  $u(x_1) = 0$ . Wir nehmen  $x_4, x_5$  und  $R$  wie in Lemma 16.3 und definieren  $r = \frac{1}{2}R$  und

$$v(x) = \frac{e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}},$$

wobei wir momentan  $\alpha$  noch nicht festlegen. Wir werden für  $u - \varepsilon v$  einen Widerspruch erzeugen auf  $B_r(x_4)$ .

Für  $v$  gilt:

- $v(x) > 0$  für  $|x - x_5| < r$  und  $v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$ ;
- $(-\Delta + c(x))v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$  und genügend



großes  $\alpha$ , denn

$$\begin{aligned} (-\Delta + c(x))v(x) &= \\ &= \frac{-\nabla \left( -2\alpha(x-x_5)e^{-\alpha|x-x_5|^2} \right) + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} \\ &= \frac{(2n\alpha - 4\alpha^2|x-x_5|^2)e^{-\alpha|x-x_5|^2} + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} \\ &\leq \frac{(-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x))e^{-\alpha|x-x_5|^2} - c(x)e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}}. \end{aligned}$$

Man wähle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  so, dass  $-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x) < 0$ .

Wir müssen als nächstes  $\varepsilon$  vernünftig wählen: Für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  gilt  $u(x) > 0$ , und weil  $\partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  kompakt ist und  $u$  stetig, kann man  $\varepsilon > 0$  derart wählen, dass

$$\varepsilon v(x) < u(x) \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}. \quad (16.2)$$

Da  $v(x) \leq 0$  und  $u(x) \geq 0$  für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5))$  und beide Funktionen nicht gleichzeitig 0 sind, folgt

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5)). \quad (16.3)$$

Kombiniert man (16.2) und (16.3), so findet man

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4).$$

Weil auch

$$(-\Delta + c(\cdot))(u - \varepsilon v) > 0 \text{ auf } B_r(x_4)$$

liefert das schwache Maximum-Prinzip, dass

$$u(x) - \varepsilon v(x) \geq 0 \text{ für } x \in \overline{B_r(x_4)}.$$

Sei nun  $\nu$  der auswärtige Normalenvektor in  $x_4$  an  $B_{2r}(x_5)$ . Weil  $u \in C^1(\Omega)$ , existiert  $(\partial_\nu u)(x_4)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (\partial_\nu u)(x_4) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - u(x_4)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - 0}{t} \geq 0. \end{aligned}$$

Weil  $u(x_4) = \varepsilon v(x_4) = 0$  und  $u(x) \geq \varepsilon v(x)$  gilt, folgt auch

$$\begin{aligned} (\partial_\nu u)(x_4) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4) - u(x_4 - t\nu)}{t} \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{0 - \varepsilon v(x_4 - t\nu)}{t} < 0 \end{aligned}$$

und das gibt einen Widerspruch. ■

## 16.2 Existenz bei einer einfachen Perturbation

In diesem Abschnitt betrachten wir für  $\lambda \geq 0$ :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.4)$$

**Theorem 16.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und jedes  $\lambda \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (16.4).

Wenn  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dann gilt

$$0 \leq u_{\lambda_2}(x) \leq u_{\lambda_1}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Wenn wir für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  mit  $f \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda$  von (16.4) finden, kann man auch für beliebige  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung finden. Denn sei  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f^+ := \frac{1}{2}(|f| + f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^+, f^- \geq 0$ . Wenn  $u_1, u_2$  Lösungen von (16.4) mit rechts  $f^+$  beziehungsweise  $f^-$ , dann ist  $u = u_1 - u_2$  eine Lösung von (16.4) mit  $f$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $f \geq 0$  gilt.

Wir definieren nun  $\mathcal{G}_\Omega : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.5)$$

Genauer gesagt, ist  $\mathcal{G}_\Omega f$  für  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (16.5) in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Wegen Korollar 15.10 gilt

$$\|\mathcal{G}_\Omega f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und  $A_\lambda : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ , definiert durch

$$A_\lambda u = \mathcal{G}_\Omega(f - \lambda u),$$

ist für  $|\lambda|C_\Omega < 1$  mit  $C_\Omega$  aus Korollar 15.10 eine Kontraktion. Für solche  $\lambda$  liefert der Fixpunktsatz von Banach eine Funktion  $u_\lambda \in C(\bar{\Omega})$  mit

$$A_\lambda u_\lambda = u_\lambda.$$

Es gilt  $u_\lambda = \mathcal{G}_\Omega(f - \lambda u_\lambda)$  und somit ist  $u_\lambda$  eine Lösung in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (16.4). Wenn  $\lambda \geq 0$ , besagt Proposition 16.2, dass  $u_\lambda \geq 0$ . Dies bedeutet, dass es eine Lösung  $u_\lambda \geq 0$  gibt für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  und außerdem folgt

$$-\Delta u_\lambda = f - \lambda u_\lambda \leq f \text{ in } \Omega.$$

Es gilt

$$-\Delta(u_\lambda - u_0) = f - \lambda u_\lambda - f = -\lambda u_\lambda \leq 0 \quad (16.6)$$

und durch das Maximum-Prinzip folgt dann  $u_\lambda \leq u_0$ .

- Fassen wir zusammen: Für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  hat (16.4) eine Lösung  $u_\lambda$ . Weil  $A_\lambda$  eine Kontraktion ist, ist die Lösung  $u_\lambda$  eindeutig. Wegen des Maximum-Prinzips gilt  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ .

Weil  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ , gilt auch

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und wir können für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  unser Argument wiederholen mit  $\mathcal{G}_{\Omega,\lambda} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.7)$$

Man zeigt so, dass es eine Lösung gibt für alle  $\lambda \in [0, 2C_\Omega^{-1})$  usw.

Ähnlich wie in (16.6) findet man für  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dass

$$-\Delta(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) + \lambda_1(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) = (\lambda_1 - \lambda_2)u_{\lambda_2} \leq 0$$

und aufgrund des Maximum-Prinzips folgt  $0 \leq u_{\lambda_2} \leq u_{\lambda_1}$  in  $\Omega$ . ■

### 16.3 Schwach harmonisch ist harmonisch

**Theorem 16.5 (Das Weylsche Lemma<sup>1</sup>)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und sei  $u \in L^1_{lok}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (16.8)$$

Dann gibt es eine Funktion  $u^* \in C^\infty(\Omega)$  mit  $\Delta u^* = 0$  und  $u = u^*$  fast überall.

**Beweis.** Wir definieren eine harmonische Funktion  $u_\varepsilon^*$  und zeigen, dass sie auf

$$\Omega_{2\varepsilon} = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$$

mit  $u$  fast überall übereinstimmt.

Sei  $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  derart, dass

$$\chi_\varepsilon(r) = \chi_\varepsilon(-r) = \begin{cases} 1 & \text{für } |r| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \dots & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |r| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |r| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

und sei

$$F_{n,\varepsilon}(x) = \chi_\varepsilon(|x|)F_n(x)$$

mit  $F_n$  die Fundamentallösung zu  $-\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren auch

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \Delta F_{n,\varepsilon}(x) & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (16.9)$$

<sup>1</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl, Elmshorn 1885 – Zürich 1955.

Weil  $\Delta F_n(x) = 0$  für  $x \neq 0$  und  $\chi_\varepsilon$  wie oben definiert ist, folgt  $\Delta F_{n,\varepsilon}(x) = 0$  für  $0 < |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$  und auch für  $|x| \geq \varepsilon M$ . Es folgt, dass  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Bemerke, dass  $H_\varepsilon$  radialsymmetrisch ist.

Wir setzen nun

$$u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Weil der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  in  $\overline{B_\varepsilon(x)}$  liegt,  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt und weil  $u$  lokal integrierbar ist, folgt  $u_\varepsilon^* \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\partial_x^\alpha u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \partial_x^\alpha H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Für  $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$  gilt, dass der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  innerhalb von  $\Omega$  liegt. Dann folgt aus der Annahme (16.8), dass

$$\Delta u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \Delta H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy = 0.$$

Die Funktion  $u_\varepsilon^*$  ist harmonisch auf  $\Omega_\varepsilon$ .

Sei  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  und setze

$$\psi(x) = \int_{\Omega} F_{n,\varepsilon}(x-y)\varphi(y) \, dy$$

Es gilt, dass  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_{\delta-\varepsilon}) \subset C_0^\infty(\Omega)$  und

$$\Delta \psi(x) = -\varphi(x) + \int_{\Omega_\delta} H_\varepsilon(x-y)\varphi(y) \, dy.$$

Wir finden

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} u(x) \Delta \psi(x) dx \\
&= \int_{\Omega} u(x) \left( -\varphi(x) + \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x-y) \varphi(y) dy \right) dx \\
&= - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x-y) u(x) dx dy \\
&= - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(y-x) u(x) dx dy \\
&= - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(y) u_{\varepsilon}^*(y) dy \\
&= \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^*(x) - u(x)) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Weil dies für beliebige  $\varepsilon < \delta$  und  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_{\delta})$  gilt, folgt für  $\varepsilon < \delta$ :

$$u = u_{\varepsilon}^* \text{ fast überall auf } \Omega_{\delta}.$$

Dann gilt für  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \delta$ , dass  $u_{\varepsilon_1}^* = u = u_{\varepsilon_2}^*$  fast überall auf  $\Omega_{\delta}$ . Weil diese  $u_{\varepsilon_i}^*$  harmonisch sind auf  $\Omega_{\delta}$ , sind sie stetig und es folgt  $u_{\varepsilon_1}^* = u_{\varepsilon_2}^*$  auf  $\Omega_{\delta}$ . Man kann  $\Omega$  auffüllen mit  $\Omega_{1/n}$ , das heißt  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \Omega_{1/n}$  und so ist  $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{1/n}^*$  eine wohldefinierte harmonische Funktion auf  $\Omega$  und es gilt  $u = u^*$  fast überall auf  $\Omega$ . ■

Wir haben superharmonische Funktionen auf  $\Omega$  definiert durch  $u \in C(\Omega)$  so, dass für alle  $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (16.10)$$

Man möchte auch eine schwache Version wie in (16.8) für superharmonische Funktionen bereit haben. Die gibt es, wie wir im nächsten Lemma zeigen werden.

**Lemma 16.6** Sei  $u \in C(\Omega)$ . Wenn für alle  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  gilt, dass

$$\int_{\Omega} u (-\Delta \varphi) dx \geq 0, \quad (16.11)$$

dann ist  $u$  superharmonisch auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 16.6.1** Selbstverständlich können wir nicht erwarten, dass eine Funktion  $u \in C(\Omega)$ , die (16.11) erfüllt in Analogie zum Weylschen Lemma, fast überall mit einer stark superharmonischen Funktion übereinstimmt. Mit „stark superharmonisch“ ist gemeint, dass  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega)$  und  $-\Delta u \geq 0$  gilt. Umgekehrt, wenn  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$  die Gleichung  $-\Delta u \geq 0$  erfüllt, folgt (16.11) durch partielle Integration.

**Beweis.** Wir werden (16.10) zeigen für  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . Sei  $\psi_{\varepsilon}$  der Mollifier aus (8.5) und definiere

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \int_{B_r(x_0)} \psi_{\varepsilon}(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy.$$

Hier ist  $G_{B_r(x_0)}(y, x)$  die Greensche Funktion auf  $B_r(x_0)$ . Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  folgt  $\varphi_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ . Auch gilt  $\varphi_{\varepsilon} \geq 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} u(x) (-\Delta \varphi_{\varepsilon}(x)) dx \\
&= \int_{\Omega} u(x) \left( -\Delta_x \int_{B_r(x_0)} \psi_{\varepsilon}(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx \\
&= \int_{\Omega} u(x) \left( \int_{B_r(x_0)} (-\Delta \psi_{\varepsilon})(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} u(x) \left( \psi_{\varepsilon}(x - x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \psi_{\varepsilon}(x - y) d\sigma_y \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x - x_0) u(x) dx - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \left( \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x - y) u(x) dx \right) d\sigma_y. \quad (16.12)
 \end{aligned}$$

Weil  $u \in C(\Omega)$  gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x - y) u(x) dx = u(y)$$

und aus (16.12) folgt

$$0 \leq u(x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y.$$

Weil  $x_0 \in \Omega$  beliebig ist, ist so (16.10) bewiesen. ■

## 16.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung

In diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (16.13)$$

wobei  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  lokal Lipschitz-stetig in  $u$  ist:

Es gebe also für jedes  $M > 0$  eine Zahl  $L_M \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L_M |u_1 - u_2| \quad \text{für } x \in \bar{\Omega} \text{ und } |u_1|, |u_2| \leq M. \quad (16.14)$$

Wir werden die Existenz einer Lösung beweisen mit Hilfe einer Methode, die das Maximum-Prinzip und die damit induzierte Ordnung verwendet. Dafür brauchen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 16.7** Eine Funktion  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Oberlösung, wenn  $\bar{u}(x) \geq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und wenn für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  gilt

$$\int (\bar{u}(x) (-\Delta\varphi(x)) - f(x, \bar{u}) \varphi(x)) dx \geq 0. \quad (16.15)$$

Eine Funktion  $\underline{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Unterlösung, wenn  $\underline{u}(x) \leq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und wenn für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  gilt

$$\int (\underline{u}(x) (-\Delta\varphi(x)) - f(x, \underline{u}) \varphi(x)) dx \leq 0. \quad (16.16)$$

**Bemerkung 16.7.1** Wenn  $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  oder  $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $-\Delta\bar{u} \geq f$  auf  $\Omega$ . Solche  $\bar{u}$  nennt man starke Oberlösung.

**Lemma 16.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$  sowohl Ober- als auch Unterlösung zu (16.13) ist, ist  $u$  eine Lösung.

**Beweis.** Sei  $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für genügend großes  $p$  die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ w(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.17)$$

Diese existiert, weil  $x \mapsto f(x, u(x)) \in C(\bar{\Omega})$ .

Für  $u - w$  und alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  folgt

$$\int (u(x) - w(x)) (-\Delta\varphi(x)) dx = 0. \quad (16.18)$$

Wenn diese Gleichung gilt für alle  $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , dann gilt sie auch für  $0 \geq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gibt es  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ : Man nehme für  $\varepsilon$  die Distanz zwischen  $\partial\Omega$  und dem Träger von  $\varphi$ , definiere  $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  durch

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \bar{\Omega}_\varepsilon, \\ \dots & \text{für } x \in \bar{\Omega}_{\varepsilon/2} \setminus \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_{\varepsilon/2}, \end{cases}$$

und setze  $\varphi_1 = \|\varphi\|_\infty \chi_\varepsilon$  und  $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ . Das heißt, dass (16.18) gilt für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  und aus dem Weylschen Lemma folgt, dass  $u - w$  ist harmonisch auf  $\Omega$ . Wegen der Randbedingung  $u - w = 0$  folgt  $u = w$  auf  $\bar{\Omega}$ . ■

**Theorem 16.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Nehme an  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  erfüllt (16.14). Wenn es eine Oberlösung  $\bar{u}$  und eine Unterlösung  $\underline{u}$  gibt mit

$$\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega,$$

dann gibt es eine Lösung  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  mit

$$\bar{u}(x) \geq u(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Statt dieses Problem für  $f$  zu betrachten, verwendet man

$$\tilde{f}(x, u) := \begin{cases} f(x, \bar{u}(x)) & \text{für } u > \bar{u}(x), \\ f(x, u) & \text{für } \bar{u}(x) \geq u \geq \underline{u}(x), \\ f(x, \underline{u}(x)) & \text{für } \underline{u}(x) > u, \end{cases}$$

und betrachtet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.19)$$

Für die Funktion  $\tilde{f}$  gilt sogar mit  $L = L_M$  und

$$M = \max(\|\bar{u}\|_\infty, \|\underline{u}\|_\infty),$$

dass für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{f}(x, u_1) - \tilde{f}(x, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|. \quad (16.20)$$

Das Randwertproblem (16.19) kann man auch schreiben als

$$\begin{cases} (-\Delta + L)u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.21)$$

Sei  $\mathcal{G}_{\Omega, L}$  der Lösungsoperator für

$$\begin{cases} (-\Delta + L)u = g & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.22)$$

Theorem 16.4 sichert die Existenz eines solchen Operators. Dann können wir (16.21) auch schreiben als

$$u(x) = \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, u(\cdot)) + Lu(\cdot) \right) (x).$$

Wir möchten einen Fixpunktsatz anwenden für

$$T : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \text{mit} \quad Tu = \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \right).$$

Dazu zeigen wir einige Hilfsresultate.

**Behauptung 16.10** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann gilt  $Tu \leq u$ .
- Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann gilt  $Tu \geq u$ .

Man findet mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta \varphi(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta + L) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} ((-\Delta + L) Tu(x)) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) \right) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u(x)) \varphi(x) dx + L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x)) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Weil  $u$  eine Oberlösung ist, gilt (16.15) und man findet also

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta \varphi(x)) dx \\ & \leq L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x)) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Nehmen wir an:  $Tu(x) - u(x)$  hat ein positives Maximum in  $x_0$ . Dann gilt in einer Umgebung  $B_r(x_0)$  von  $x_0$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$  mit  $\varphi \geq 0$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(x_0)} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta \varphi(x)) dx \\ & \leq L \int_{B_r(x_0)} (u(x) - Tu(x)) \varphi(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 16.6 ist  $Tu - u$  subharmonisch auf  $B_r(x_0)$  und wird somit maximal auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$ . Dann ist  $Tu - u$  konstant, wo  $Tu - u \geq 0$  gilt, und weil  $Tu - u \leq 0$  auf  $\partial \Omega$  ist, folgt, dass diese Konstante nur 0 sein kann. Wir haben einen Widerspruch. Ähnliche Argumente zeigen die Behauptung für eine Unterlösung.  $\square$

**Behauptung 16.11** Seien  $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u_1 \leq u_2$  dann gilt  $Tu_1 \leq Tu_2$ .

Wegen (16.20) gilt für  $u_1 \leq u_2$ , dass

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \\ & \leq L |u_1 - u_2| + L (u_1 - u_2) = 0. \end{aligned}$$

Aus Proposition 16.2 folgt dann, dass

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \\ &= \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Die Ordnung bleibt erhalten.  $\square$

**Behauptung 16.12** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Oberlösung.
- Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Unterlösung.

Sei  $u$  eine Oberlösung. Dann gilt  $Tu \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für alle  $p \in (1, \infty)$ . Weil  $u \geq Tu$  gilt, und weil

$$s \mapsto \tilde{f}(x, s) + Ls$$

eine monoton wachsende Funktion ist, folgt, dass

$$(-\Delta + L)Tu = \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \geq \tilde{f}(\cdot, Tu) + LTu.$$

Also ist  $Tu$  eine starke Oberlösung.  $\square$

Diese drei Behauptungen zeigen, dass man mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_0 = u \\ \underline{u}_{n+1} := T\underline{u}_n \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_0 = \bar{u} \\ \bar{u}_{n+1} := T\bar{u}_n \end{array} \right.$$

Folgen von Unter- und Oberlösungen  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  findet mit

$$u = \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \dots \leq \bar{u}_2 \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0 = \bar{u}.$$

Diese Funktionen sind gleichgradig gleichmäßig stetig und beschränkt. Wegen des Satzes von Arzela-Ascoli gibt es konvergente Teilfolgen von  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Weil diese Funktionen geordnet sind, konvergieren sogar die Folgen selbst. Für

$\underline{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}_k(x)$  und ähnlich für  $\bar{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_k(x)$  gilt

$$\underline{u}_\infty = \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, \underline{u}_\infty) + L\underline{u}_\infty \right) \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Dann ist  $\bar{u}_\infty$  ( $\underline{u}_\infty$ ) eine Lösung von (16.19). Weil  $\underline{u}(x) \leq \underline{u}_\infty(x) \leq \bar{u}_\infty(x) \leq \bar{u}(x)$ , folgt

$$\tilde{f}(x, \underline{u}_\infty(x)) = f(x, \underline{u}_\infty(x))$$

und  $\bar{u}_\infty$  ( $\underline{u}_\infty$ ) ist dann sogar eine Lösung von (16.13). Es ist übrigens nicht unbedingt so, dass  $\underline{u}_\infty = \bar{u}_\infty$ .  $\blacksquare$

**Aufgabe 16.1** Sie  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -Rand. Betrachte

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 - u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.23)$$

1. Zeigen Sie, dass  $w = 1$  eine Oberlösung ist von (16.23).
2. Zeigen Sie, dass  $v = 0$  eine Unterlösung ist von (16.23).
3. Begründen Sie, dass es eine Lösung gibt von (16.23).

## 16.5 Variationelle Methoden

Auch in diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.24)$$



Wenn  $f$  bestimmte Eigenschaften hat, kann man zeigen, dass

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - F(x, u(x)) \right) dx$$

mit

$$F(x, u(x)) = \int_{v=0}^{u(x)} f(x, v) dv$$

ein Minimum in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  besitzt. Wenn  $u_{\min}$  diese minimierende Funktion ist und  $F$  genügend nett ist (zum Beispiel falls  $f$  stetig ist und eine passende Wachstumsbedingung erfüllt), dann folgt

$$\partial_t J(u + t\varphi)|_{t=0} = 0.$$

Weil

$$\begin{aligned} \partial_t J(u + t\varphi) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u + t\varphi) - J(t\varphi)}{t} \\ &= \int (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) - f(x, u(x)) \varphi(x)) dx, \end{aligned} \quad (16.25)$$

folgt, dass  $u$  eine schwache Lösung ist.

Für zum Beispiel  $f(u) = 1 - u^3$  findet man

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - u + \frac{1}{4} u^4 \right) dx$$

und man kann sehen, dass  $J$  ein Infimum hat. Das gibt Hoffnung, dass  $J$  sogar ein Minimum hat.  $J$  hat ein Infimum, wenn  $J(u) \geq c$  gilt für alle  $u$ , die in Betracht kommen;  $J$  hat ein Minimum, wenn  $J(u) \geq J(u_0)$  für alle  $u$ , die in Betracht kommen.

Oft kann man nicht nur eine Lösung als Minimum des Funktionals finden, sondern erscheinen Lösungen möglicherweise auch als Sattelpunkt des Funktionals. In einem Sattelpunkt kann man auch (16.25) und eine schwache Lösung erwarten.

**Beispiel 16.13** Wir betrachten

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = u(x)^3 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.26)$$

Dann nimmt man

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{4} u(x)^4 \right) dx.$$

Wenn für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (16.27)$$

dann folgt, dass

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|u\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ &\geq \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \left( 2 - C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

und dass  $F$  für  $u = 0$  ein lokales Minimum hat. Die Tatsache, dass  $u = 0$  eine Lösung ist, ist nicht besonders überraschend. Wenn man aber bemerkt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(tu) = -\infty$  für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ , dann kann man auch noch einen Sattelpunkt erwarten. Ein Sattelpunkt für eine Funktion  $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  in endlichen Dimensionen ist relativ klar definiert. Hier haben wir jedoch eine Funktion  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist ein unendlich dimensionaler Raum. Ambrosetti und Rabinowitz haben gezeigt, dass für derartige Probleme tatsächlich ein Sattelpunkt existieren kann. Dieses Ergebnis ist bekannt geworden als das Mountain-Pass Lemma<sup>2</sup>. Wir sparen die Details und geben nur die wichtigsten Bedingungen:

Wenn es  $e \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt und  $\varepsilon, \delta > 0$  mit

<sup>2</sup>Ambrosetti, Antonio; Rabinowitz, Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

- $J(0) = 0$ ,
- $J(u) \geq \varepsilon > 0$  für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \delta$ ,
- $J(e) < 0$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} > \delta$ ,

dann definiert man

$$m := \inf \left\{ \sup_{t>0} J(\gamma(t)); \gamma \in C([0, 1]; W_0^{1,2}(\Omega)) \right\}.$$

Diese Zahl  $m$  ist die Passhöhe;  $\gamma$  ist eine Kurve in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , die 0 und  $e$  verbindet. Anschließend betrachtet man eine Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $J(u_n) \rightarrow m$ . Dann muss man noch zeigen, dass  $u_n$  konvergiert und dazu braucht man noch einige Bedingungen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde.

Übrigens braucht man für (16.27) noch einen Sobolev-Einbettungssatz. Die Bedingung dazu ist  $1 - \frac{n}{2} > -\frac{n}{4}$  und ist nur erfüllt, wenn  $n < 4$ .

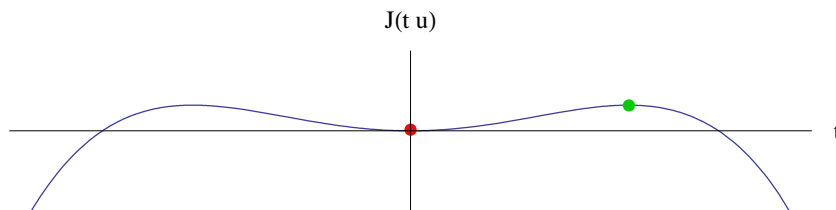


Abbildung 16.3: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 1.

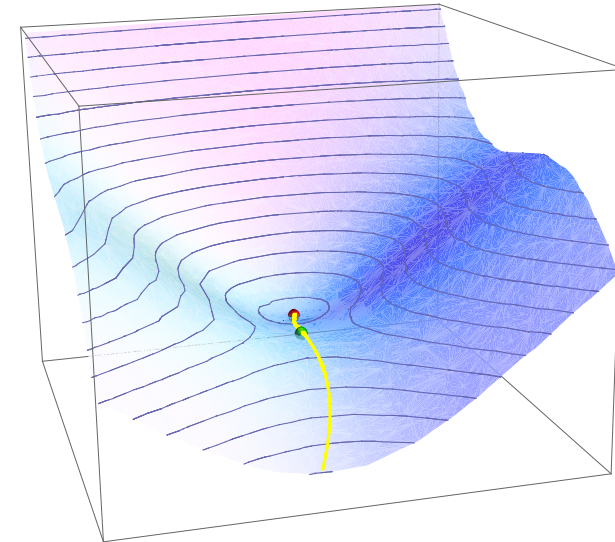


Abbildung 16.4: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 2. Man sucht diesen Punkt (= Funktion für das obige Beispiel), indem man alle Wege vom roten Punkt in die Tiefe betrachtet. Auf jedem Weg  $\gamma$  gibt es ein Maximum  $m_\gamma$ . Schlussendlich nimmt man das Infimum von  $m_\gamma$  über alle Wege  $\gamma$  und versucht zu zeigen, dass dieses Infimum angenommen wird.

# Literaturverzeichnis

- [1] W. Arendt, K. Urban, Partielle Differenzialgleichungen, Springer 2010.
- [2] W.A. Strauss, Partielle Differentialgleichungen. Vieweg, 1995
- [3] E. DiBenedetto, Partial differential equations. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995.
- [4] L.C. Evans, Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] Y. Pinchover, J. Rubinstein, An introduction to partial differential equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [6] H.-Ch. Grunau, Partielle Differentialgleichungen, Skript zur Vorlesung 2008/09.
- [7] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1983.