Prof. Dr. Guido Sweers
Henrik Schließauf, M.Sc. **SoSe 2019**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 19.04.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1: Wir betrachten die Funktionenfolgen

- $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = e^{-n|x|}$ und
- $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) = e^{-|x-n|}$.

Prüfen Sie jeweils:

(a) Ist diese Familie gleichmäßig beschränkt?

(b) Ist diese Familie gleichgradig stetig?

(c) Gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge?

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**:** Sei $L > 0$ gegeben.

$$\mathcal{F}_L := \{\, f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \;\; ; \; f \text{ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante } L \,\}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{F}_L$ ist gleichmäßig beschränkt.

(b) $\mathcal{F}_L$ ist gleichgradig stetig.

Aufgabe 3: Gegeben seien die folgenden Funktionen $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$:

$$u_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad u_2(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad u_3(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Überlegen Sie, ob sich die Funktionen u_i zu Funktionen in $C^0(\mathbb{R})$ oder sogar $C^1(\mathbb{R})$ fortsetzen lassen.

Aufgabe 4 (Je 1 Punkt)**:** Entscheiden Sie bei den folgenden Mengen Ω_i jeweils, ob der Rand C^0-, $C^{0,\alpha}$- oder C^1-Regularität besitzt (wobei $\alpha \in (0,1]$).

(a) $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in (-1,1)^2 : y < \sqrt{|x|}\right\}$

(b) $\Omega_2 \left\{(x,y) \in (-1,1)^2 : y < |x|\right\}$

(c) Der Rand von Ω_3 ist durch $[0,2\pi) \ni t \mapsto ((2\cos t + 1)\cos t, (2\cos t + 1)\sin t)$ parametrisiert.

(d) $\Omega_4 = B_1(0) \setminus \{0\}$

(e) $\Omega_5 = B_2(0) \setminus \partial B_1(0)$

(f) $\Omega_6 = \{(s+t^2, t^3) : s \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}\}$

(g) Ω_7 ist die größte offene Menge innerhalb $\left\{(x,y) \in (-1,1)^2 : y < \left(\sin \frac{1}{x}\right)^2\right\}$

Aufgabe 5: Sei $\gamma \in (0,1)$ und seien $u, v \in C^{0,\gamma}([0,1];[0,1])$. Liegen die folgenden Funktionen dann in $C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$?

(a) $u + v$

(b) uv

(c) $u \circ v$

Aufgabe 6 (3+3+3 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

(a) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\bar{\Omega}), C^{0,1}(\bar{\Omega}), C^1(\bar{\Omega})$ an.

(b) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\Omega), C^{0,1}(\Omega), C^1(\Omega)$ an.

(c) In welcher wichtigen Eigenschaft unterscheiden sich $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ und $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0})$?

Aufgabe 7: Überlegen Sie sich ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $u \in C^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, so dass u nicht zu einer Funktion in $C^0(\bar{\Omega})$ fortgesetzt werden kann.
Gibt es so eine Funktion auch für $\Omega = B_1(0)$?