Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2021**
Henrik Schließauf, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 10

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 28.06.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf“.

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)**:** Seien $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ mit kompaktem Träger gegeben.

(a) Sei $u(x,t)$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, die von $\|u_0\|_{C^1(\mathbb{R}^3)}$ und $\|u_1\|_{C^0(\mathbb{R}^3)}$ abhängt so dass

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{1+t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für $r, R > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$ beliebig gilt:

$$\int_{B_R(0) \cap \partial B_r(x_0)} 1 \, d\sigma_x \leq \int_{\partial B_R(0)} 1 \, d\sigma_x$$

(b) Betrachten Sie nun die Gleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = u_t^2(x,t) - |\nabla u(x,t)|^2 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u(x,0) = \epsilon u_0(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = \epsilon u_1(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ eine eindeutige globale Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ besitzt. *Hinweis: Führen Sie die Substitution $v = 1 - e^{-u}$ durch um die Gleichung auf ein lineares Problem zu reduzieren.*

Aufgabe 2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} t\ u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

höchstens eine Lösung in $C^2\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ hat (obwohl nur ein Anfangswert gegeben ist).
Hinweis: Betrachten Sie das Energie-Funktional $E(t) = \int_\Omega \left(t u_t(x,t)^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) dx$.

Aufgabe 3 (4+2+4 Punkte)**:** Wir betrachten auf $B_\pi(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < \pi\}$ das Problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in B_\pi(0) \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial B_\pi(0) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in B_\pi(0), \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in B_\pi(0), \end{cases}$$

für die stetige Funktion u_0 mit $u_0(x) = \frac{\sin(|x|)}{|x|}$ für $|x| \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass es höchstens eine $C^2\left(\overline{B_\pi(0)} \times [0,\infty)\right)$-Lösung gibt.

(b) Berechnen Sie $-\Delta u_0(x)$.

(c) Verwenden Sie einen Produktansatz, um die Lösung zu berechnen.

Aufgabe 4: Wir betrachten für Funktionen $u_0, v_0 \geq 0$ mit kompaktem Träger das Problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(|x|) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) = v_0(|x|) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie, dass die Lösungen radial-symmetrisch bezüglich x sind.

(b) Wenn $x \mapsto u(x,t)$ radial-symmetrisch ist, dann ist $\tilde{u}(|x|,t) := u(x,t)$ wohldefiniert. Unten stehen zwei Bilder einer solchen Funktion $r \mapsto \tilde{u}(r,t)$ für $n \in \{1,2,3\}$ mit u_0, v_0 wie oben. Welches n gehört zu welchem Bild? Begründen Sie Ihre Antwort.