Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2021**
Henrik Schließauf, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 11

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 05.07.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf".

Aufgabe 1: Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand betrachten wir Lösungen u von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass für diese Lösungen die nullten, ersten und zweiten Ableitungen existieren auf $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ und da stetig und gleichmäßig beschränkt sind.

(a) Sei $E(t)$ gegeben durch

$$E(t) = \int_\Omega u(x,t)^2 \, dx.$$

Zeigen Sie, dass $E'(t) \leq 0$ und $E''(t) \geq 0$.

Dann ist $t \mapsto E(t)$ monoton fallend und $t \mapsto E'(t)$ monoton steigend.

(b) Begründen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} E'(t) = 0$.

(c) Folgern Sie, dass $\lim_{t\to\infty} |\nabla u(x,t)| = 0$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Arzelà-Ascoli.

(d) Zeigen Sie, dass $M'(t) = 0$ für

$$M(t) = \int_\Omega u(x,t) \, dx.$$

(e) Begründen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = c$ und berechnen Sie c in Abhängigkeit von u_0.

(f) Können Sie eine physikalische Erklärung zu dem Ergebnis geben?

Aufgabe 2 (8 Punkte)**:** Leiten Sie eine explizite Formel für die Lösung von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + cu(x,t) = f & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

her, wobei $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$.

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion

$$u(x,t) = \frac{x}{t\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right) u(x,t) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Ist diese Funktion ein Gegenbeispiel für die Eindeutigkeit bei der Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension?

(d) Berechnen Sie $\lim_{t\downarrow 0} F_{u(\cdot,t)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (3+3+3+3 Punkte)**:** Wir betrachten Lösungen $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = x(2-x) & \text{für } x \in (0,1), \\ u(0,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ u_x(1,t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

wobei $f \in C_b^2([0,1] \times [0,\infty))$ auch $f_x(1,t) = 0$ für alle $t > 0$ erfüllt.

(a) Sei $f(x,t) \geq 0$ für $(x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$.

Zeigen Sie, dass dann auch $u(x,t) \geq 0$ für alle $(x,t) \in (0,1] \times (0,\infty)$.

Hinweis: Erweitern Sie die Gleichung sinnvoll zu einem Problem auf $[0,2] \times [0,\infty)$.

(b) Sei $f(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$.

Berechnen Sie dann die Stelle $(x_0,t_0) \in [0,1] \times [0,\infty)$, für die gilt

$$u(x_0,t_0) = \sup_{(x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)} u(x,t).$$

(c) Sei $f(x,t) = 2$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$.

Begründen Sie, dass in dem Fall $u(x,t) = x(2-x)$ die eindeutige Lösung ist.

(d) Sei $0 \leq f(x,t) < 2$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$.

Berechnen Sie auch dann die Stelle $(x_0,t_0) \in [0,1] \times [0,\infty)$, für die gilt

$$u(x_0,t_0) = \sup_{(x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)} u(x,t).$$