**Prof. Dr. Guido Sweers** **SoSe 2021**
**Henrik Schließauf, M.Sc.**

# Partielle Differentialgleichungen

## Übungsblatt 12

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 12.07.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf“.

**Aufgabe 1** (8 Punkte)**:** Seien $v_1, v_2 \in C_b^2\left(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\right)$ Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $v_t = \Delta v$, so dass

$$v_1(x,0) \leq v_2(x,0) \text{ für } x \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass

- entweder $v_1(x,t) < v_2(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$,
- oder $v_1(x,t) \equiv v_2(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ gilt.

**Aufgabe 2:** Die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) + 6u(x,t)\,\partial_x u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) = 0$$

ist nach Korteweg und de Vries benannt und soll flache Wasserwellen modellieren.

(a) Sie hat Lösungen der Form $u(x,t) = v(x - \sigma t)$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$. Geben Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $v$ an.

(b) Diese Differentialgleichung hat die Form $\frac{d}{ds} F\left(v''(s), v'(s), v(s)\right) = 0$. Also gilt

$$F\left(v''(s), v'(s), v(s)\right) = c_1.$$

Berechnen sie $F$.

(c) Auch $v'(s)\, F\left(v''(s), v'(s), v(s)\right) = c_1 v'(s)$ kann man noch einmal explizit integrieren und man findet eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Konstanten. Geben Sie diese Differentialgleichung an.

(d) Durch Trennung der Variablen kann man auch diese letzte Differentialgleichung implizit lösen. Geben Sie die implizite Darstellung an.

(e) Man findet so Lösungen der Form

$$u(x,t) = \frac{\sigma}{2\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x - \sigma t - c)\right)\right)^2}.$$

Zeigen Sie, dass für $\sigma > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ durch $u$ tatsächlich eine Lösung gegeben ist.

(f) Beschreiben Sie, wie die Lösungen aussehen.

**Aufgabe 3** (3+2+5+2+0 Punkte)**:** Ersetzt man den zweiten Term in der Wärmeleitungsgleichung durch $u^m$ mit $m > 1$, dann bekommt man die Poröse-Medien-Gleichung für $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, nämlich

$$u_t - \Delta\left(u^m\right) = 0. \tag{1}$$

Sie modelliert die Konzentration $u \geq 0$ eines Gases, wenn dieses durch ein poröses Medium fließt. Für (1) gibt es explizite nach Barenblatt benannte Lösungen. Für $m = 2$ sind sie für beliebige $R > 0$ wie folgt definiert:

$$u\left(x, t\right) = t^{-3/5}\left(R - \frac{1}{20}\frac{\left|x\right|^2}{t^{2/5}}\right)^+, \tag{2}$$

wobei

$$(w)^+ = \begin{cases} w & \text{für } w > 0, \\ 0 & \text{für } w \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für $u$ aus (2) gilt:

$$u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right) \text{ und } u^2 \in C^1\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right) \cap C^{1,1}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right).$$

*Hinweis: Es gilt $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right)$ wenn es für jedes $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ ein $L > 0$ und eine Umgebung $U_{(x,t)} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ gibt, sodass*

$$|u(x,t) - u(y,s)| \leq L\|(x,t) - (y,s)\| \qquad \forall (y,s) \in U_{(x,t)}.$$

(b) Berechnen Sie für festes $R > 0$ den Träger einer Funktion $u$ aus (2).

(c) Zeigen Sie, dass diese Funktion $u\left(x, t\right)$ die Differentialgleichung in (1) im folgenden schwachen Sinne erfüllt:

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+} \left(-\varphi_t(x,t)\ u(x,t) + \nabla\varphi(x,t) \cdot \nabla u(x,t)^2\right) dxdt = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+\right)$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{t \downarrow 0} u\left(x, t\right)$.

(e) Auch für (1) gibt es ein Maximum Prinzip. Für schwache Lösungen $u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)\right)$ und für beschränkte $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $T > 0$ gilt nämlich:

$$\sup_{(x,t) \in \Omega \times (0,T)} u\left(x, t\right) = \sup_{(x,t) \in \partial_P(\Omega \times (0,T))} u\left(x, t\right).$$

Gilt auch ein starkes Vergleichsprinzip wie in Aufgabe 1 dargestellt?

**Aufgabe 4:** Wir betrachten für $m > 1$ nicht-negative Lösungen $u \in C^{1,1}\left(\overline{\Omega} \times [0, \infty)\right)$ von

$$\begin{cases} u_t\left(x, t\right) - \Delta\left(u\left(x, t\right)\right)^m = 0 & \text{für } \left(x, t\right) \in \Omega \times \left(0, \infty\right), \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x, 0\right) \geq 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u\left(x, t\right) = 0 & \text{für } \left(x, t\right) \in \partial\Omega \times \left(0, \infty\right). \end{cases}$$

(a) Sei $E\left(t\right) := \int_\Omega u\left(x, t\right)^2 dx$. Zeigen Sie, dass $E'\left(t\right) \leq 0$ für alle $t \in \left(0, \infty\right)$ gilt.

(b) Angenommen es gibt eine Funktion $u_\infty(x)$ mit $\lim_{t \to \infty} \|u(\cdot, t) - u_\infty\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 0$. Folgern Sie, dass dann $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = 0$ gilt.