Prof. Dr. Guido Sweers
Henrik Schließauf, M.Sc. **SoSe 2021**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 26.04.2019, um 14 Uhr. Bitte beachten Sie, dass auch nur Ihre Bearbeitung der pepunkteten Aufgaben korrigiert wird.

Aufgabe 1: Im Skript findet man $v(x_1, x_2) = \dfrac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$. Zeigen Sie, dass

$$u(x_1, x_2) := (x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1})\, v(x_1, x_2)$$

auch eine Lösung von dem folgenden Randwertproblem ist:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{für } x \in B_1(0)\,, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0) \setminus \{(1,0)\}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Aufgabe 2: Für welche $\alpha \in [0,1]$ sind die folgenden Funktionen in $C^{0,\alpha}([0,1])$?

(a) $f_1(x) = x^\beta$ mit $\beta \in [0, \infty)$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} -x \ln(x) & \text{für } x \in (0,1]\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{0<x<y<1} \frac{x}{y}\; d(x,y)$

(b) $\displaystyle\int_{x^2+y^2 \le 1} (2x^2 + y^2)\; d(x,y)$

Aufgabe 4: Sei $X = \{(x,y) \in (0,1)^2 : x + y < 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_X e^{\frac{y}{x+y}}\, d(x,y).$$

Hinweis: $(u,v) = \left(x + y, \frac{y}{x+y}\right)$

Aufgabe 5 (5+5 Punkte)**:** Gegeben sei

$$\int_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x\cos(1-x^2-y^2) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} d(x,y).$$

(a) Berechnen Sie das Integral direkt.

(b) Berechnen Sie das Integral mit dem Satz von Gauß.

Aufgabe 6 (5+5 Punkte)**:** Eine Übung zu Polarkoordinaten:

(a) Zeigen Sie, dass für $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nur von $\|x\|$ abhängen, für die also ein $\tilde{f}$ mit $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$ existiert, folgendes gilt:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r) \text{ für } r = \|x\|.$$

Aufgabe 7: (a) Zu welcher Differentialgleichung wird

$$u_{xx} - u_{yy} = f,$$

wenn die Substitution $s = x - y$, $t = x + y$ durchgeführt wird?

(b) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(x,y) = g(x-y) + h(x+y) \tag{2}$$

eine Lösung liefert zu

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich jede zweimal stetig differenzierbare Lösung von (3) wie in (2) schreiben lässt.