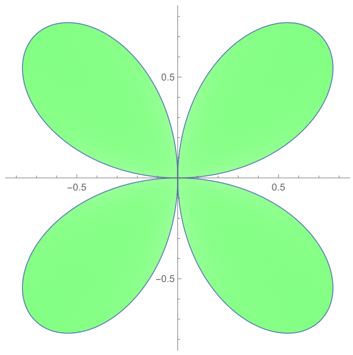
Prof. Dr. Guido Sweers
Henrik Schließauf, M.Sc. **SoSe 2021**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 3

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 03.05.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf“.



Aufgabe 1: Das vierblättrige Kleeblatt wird durch

$$\Omega = \left\{ r\sin(2\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} ; r \in [0,1] \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

beschrieben. Bestimmen Sie den Flächeninhalt von Ω.

Aufgabe 2: Man kann zeigen, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{falls } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{falls } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt (siehe Skript unter Lemma 3.16). Für $\epsilon > 0$ definiere man nun $\Psi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\Psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\, dz \right)^{-1} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\epsilon(x)\, dx = 1$$

Sei nun $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und für $\epsilon > 0$ definiere

$$u_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \Psi_\epsilon(x - y)\, dy.$$

(Man schreibt auch $u_\epsilon = u * \Psi_\epsilon$ und nennt u_ϵ die *Faltung* von u und Ψ_ϵ.)

(b) Zeigen Sie, dass $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt.

(c) Nehmen Sie weiter an, dass u eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist. Zeigen Sie, dass dann u_ϵ für $\epsilon \to 0$ gleichmäßig gegen u konvergiert.

Aufgabe 3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $\delta > 0$ sei

$$\Omega_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \inf_{y \in \Omega} \|x - y\| < \delta \right\}$$

die δ-Umgebung von Ω und bezeichne χ_δ die zugehörige charakteristische Funktion

$$\chi_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \Omega_\delta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Definiere $v_\epsilon = \chi_{2\epsilon} * \Psi_\epsilon$ durch

$$v_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad v_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{2\epsilon}(y) \Psi_\epsilon(x - y)\, dy,$$

wobei Ψ_ϵ die Funktion aus Aufgabe 5 ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) $0 \leq v_\epsilon(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $v_\epsilon = 1$ auf Ω_ϵ

(iii) $v_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{support} v_\epsilon \subset \Omega_{3\epsilon}$

Skizzieren Sie den Graph von v_ϵ für $\Omega = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie, dass es $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt, so dass $\psi = 1$ auf K gilt.

Aufgabe 4 (2+3+3+2 Punkte)**:** Die schwache Formulierung der Differentialgleichung $u''''(x) = f(x)$ ist gegeben durch:

$$\int_{\mathbb{R}} u''(x)\, \varphi''(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Hier ist $u \in C^1(\mathbb{R})$ eine fast überall zweimal differenzierbare Funktion und ihre zweite Ableitung ist lokal integrierbar.

(a) Nehmen wir an, f ist stetig. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung der Differentialgleichung auch eine schwache Lösung ist.

(b) Berechnen Sie alle klassischen Lösungen für $f(x) = e^{-|x|}$.

(c) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $f(x) = \operatorname{sign}(x)$.

(d) Gibt es eine schwache Lösung für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$?

Aufgabe 5: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wenn $u \in C^2\left(\bar{\Omega}\right) \cap C_0^0\left(\overline{\Omega}\right)$ die folgende Gleichung erfüllt,

$$\int_\Omega e^{-|x|^2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \; dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$, von welchem Randwertproblem ist u dann eine Lösung?

Aufgabe 6 (5+5 Punkte)**:** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_{xy}(x,y) = 0 \quad \text{für } (x,y) \in [0,1]^2$$

mit Randbedingungen

$$u(x,0) = \eta(x) \quad \text{für } x \in [0,1]$$

und

$$u(0,y) = \psi(y) \quad \text{für } y \in [0,1],$$

wobei $\eta, \psi \in C^2[0,1]$ gegeben sind und $\eta(0) = \psi(0)$ gilt.

(a) Geben Sie eine Lösungsformel für u an.

(b) Für $\eta, \psi \in C^1[0,1] \setminus C^2[0,1]$ gibt es keine Lösung u in $C^2([0,1]^2)$. Es gibt in diesem Fall jedoch noch eine schwache Lösung. Definieren Sie eine passende Formulierung einer solchen Lösung.