Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2021**
Henrik Schließauf, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 4

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 10.05.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf“.

Aufgabe 1 (2+3+2+3 Punkte)**:** Wir betrachten die folgende Integralgleichung für $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$:

$$\int_{-1}^{1} \left(x\ u(x)\ \ \varphi''(x) + 2u(x)\ \ \varphi'(x) + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \varphi(x) \right) dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$.

(a) Welche Differentialgleichung erfüllt eine solche Funktion u außerhalb von 0? *Hinweis: es gilt, dass eine Lösung u, außer in 0, zweimal stetig differenzierbar ist.*

(b) Berechnen Sie eine stetige Funktion $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die diese Integralgleichung erfüllt für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$.

(c) Ist diese Funktion u eine klassische Lösung der Differentialgleichung in (a)?

(d) Erfüllt diese Funktion u die Integralgleichung

$$\int_{-1}^{1} \left(-x\ u'(x)\ \ \varphi'(x) - u'(x)\ \ \varphi(x) + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \varphi(x) \right) dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$?

Aufgabe 2: Sei u harmonisch auf einen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass u keine isolierten Nullstellen hat. [Genauer gesagt sollen Sie also beweisen: Ist $x_0 \in \Omega$ und $u(x_0) = 0$, dann gibt es eine Folge $(x_j) \subset \Omega$ mit $x_j \neq x_0$, $x_j \to x_0$ für $j \to \infty$ und $u(x_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.]

Aufgabe 3 (2+2+2+4 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $T \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) - \Delta_x T(x,t) + (T(x,t))^3 = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x,0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega \end{cases}$$

und betrachten Sie $E(t) = \int_\Omega T(x,t)^2 dx$.

(a) Zeigen Sie, dass $\int_\Omega T(x,t) T_t(x,t)\, dx \leq -\int |\nabla_x T(x,t)|^2\, dx$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $E(t) \leq E(0)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $E_\infty := \lim_{t\to\infty} E(t)$ existiert.

(d) Zeigen Sie, dass falls $T_\infty \in L^2(\Omega)$ mit $\lim_{t\to\infty} \|T_\infty - T(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ existiert, dann $T_\infty = 0$ gilt.

Aufgabe 4: Die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche ist

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x,y)|^2}} \right) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:

$$\partial_r \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r(r)|^2}} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r(r)|^2}} \right) = 0.$$

(b) Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine radialsymmetrische Lösung für

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x,y)|^2}} \right) = 0 & \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x,y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) = h & \text{für } x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

(c) Welchen Wert darf h maximal annehmen, damit eine radialsymmetrische Lösung $(x,y) \mapsto u(x,y)$ existiert?

Aufgabe 5: Auf

$$\Omega := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : 0 < r < 1 \text{ und } 0 \leq |\varphi| < \tfrac{3}{4}\pi\}$$

sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ durch Polarkoordinaten folgendermaßen definiert:

$$U(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := u(r,\varphi) = \left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}}\right) \sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi + \frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

(a) Zeigen Sie, dass U in Ω die Differentialgleichung $-\Delta U = 0$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie folgendes Randverhalten:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\uparrow 1} u(r,\varphi) = 0 && \text{für } \varphi \in \left(-\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi\right) \\ &\lim_{\varphi\downarrow -\frac{3}{4}\pi} u(r,\varphi) = \lim_{\varphi\uparrow \frac{3}{4}\pi} u(r,\varphi) = 0 && \text{für } r \in (0,1) \end{aligned}$$

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine nicht-konstante harmonische Funktion ihre Extrema nur auf dem Rand ihres Gebietes annehmen kann. Wie verhält es sich hier mit U?