Prof. Dr. Guido Sweers
Henrik Schließauf, M.Sc.

SoSe 2021

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 5

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 17.05.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf".

Aufgabe 1: Finden Sie eine Formel für die Lösung $(x_1, x_2) \mapsto u(x_1, x_2)$ des folgenden Problems:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x_1, x_2) = \sin(x_2) & \text{für } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ u(s, -s) = 0 & \text{für } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 2: Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\vec{x} \cdot \nabla u(\vec{x}) = x_1$$

(a) Zeigen Sie, dass $u(\vec{x}) = x_1$ eine Lösung ist.

(b) Berechnen Sie eine Lösung von $\vec{x} \cdot \nabla u(\vec{x}) = x_1$ auf einer Umgebung von $|\vec{x}| = 1$, für die gilt

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ für } |\vec{x}| = 1.$$

(c) Geben Sie das maximale Definitionsgebiet dieser Lösung an.

Aufgabe 3 (3+7 Punkte)**:** Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 1 - x_2 \end{pmatrix},$$

und das Randwertproblem

$$\begin{cases} \vec{v}(x_1, x_2) \cdot \nabla u(x_1, x_2) = x_2 + u(x_1, x_2), \\ u(x_1, 0) = \sin(x_1). \end{cases} \tag{1}$$

(a) Geben Sie ein parameterabhängiges, gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen an, mit dessen Lösungen man Lösungen für (1) schreiben kann.

(b) Berechnen Sie eine Lösung für (1). Auf welchem Gebiet ist diese Lösung definiert?

Aufgabe 4: Betrachtet wird die Gleichung

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $F \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Sei $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine klassische Lösung dieses Anfangswertproblems und sei weiter $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion, so dass $u(x,t) = 0$ für alle x mit $|x| \geq M(t)$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\,dx \tag{2}$$

für alle $t > 0$ erfüllt ist.

(b) Sei $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ nur eine stetige schwache Lösung des Anfangswertproblems. Sei weiter M wie in (a). Zeigen Sie, dass (2) immer noch gilt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**:** Wir betrachten die Burgers-Gleichung $u_t + uu_x = 0$ für $t > 0$ mit Anfangswert

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie eine physikalisch relevante (schwache) Lösung $u(x,t) \in C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.