Prof. Dr. Guido Sweers
Henrik Schließauf, M.Sc. **SoSe 2021**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 31.05.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf".

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)**:** Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, u) = 2x_1 - x_2 - u.$$

(a) Berechnen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \\ u(s,s) = \sin(s) & \text{für } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Wieso gibt es nur eine solche Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

Aufgabe 2: Sei $\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 4 - x_2 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, u) = x_1 - x_2 u.$$

(a) Begründen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \\ u(s,0) = \sin(s) & \text{für } s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

genau eine Lösung in $C^1(\mathbb{R} \times [0,4))$ hat.

(b) Wieso existiert die Lösung sogar auf $\mathbb{R} \times (-\infty, 4)$?

(c) Unter der Annahme, dass $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,4])$ gilt, kann man $u(x_1, 4)$ berechnen. Berechnen Sie $u(x_1, 4)$. *Hinweis: Berechnen Sie zuerst* $u(0, x_2)$ *für* $x_2 \in [0,4]$.

Aufgabe 3 (4+4+4 Punkte)**:** Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u(x,y)(u_x(x,y) - u_y(x,y)) = y - x, \\ u(1,s) = s^2 \qquad \text{für } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Lösen Sie das zugehörige parameterabhängige System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(b) Seien $X(t)$, $Y(t)$ und $U(t)$ die Lösungen dieses Systems. Zeigen Sie, dass

$$U(t)^2 - 2X(t)Y(t) \equiv C$$

gilt, wobei $C = C(s)$ eine vom Parameter s abhängige Konstante ist.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,y)$ des ursprünglichen Systems.

Aufgabe 4: Wir betrachten

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x - 2y\ u(x,y) \\ y + 2x\ u(x,y) \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x,y) = -\frac{1}{2}u(x,y), \\ \qquad u(x,y) = \frac{1}{2}y \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

und sind interessiert an einer Lösung auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$.

(a) Verwenden Sie Polarkoordinaten, um eine Lösung in Parameterform zu berechnen.

(b) Berechnen Sie $R > 0$ derart, dass die Lösung $u(x,y)$ für alle (x,y) mit

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$$

eindeutig durch die Parameterform definiert ist.

(c) Definieren Sie eine Integrallösung.

(d) Geben Sie eine DGl für die Trennkurve bei einer Stoßwelle wie Rankine-Hugoniot an.

(e) Berechnen Sie die Trennkurve.