

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 07.06.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf“.

Aufgabe 1 (6+2+2 Punkte): Sei $Q(\xi, \eta)$ mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ das Symbol eines Differentialoperators L von rein zweiter Ordnung in 2 Dimensionen mit konstanten Koeffizienten, also

$$L := Q \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + 2\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Es gibt $c > 0$ derart, dass

$$\begin{aligned} &\text{entweder } Q(\xi, \eta) \geq c(\xi^2 + \eta^2) \text{ für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}, \\ &\text{oder } Q(\xi, \eta) \leq -c(\xi^2 + \eta^2) \text{ für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Die beiden Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ haben das gleiche Vorzeichen.

(iii) Das Polynom $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$ hat zwei Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(b) Angenommen L erfüllt die drei Bedingungen. Ist L hyperbolisch, elliptisch, parabolisch oder sonstiges, oder ist diese Klassifizierung so noch nicht festgelegt?

(c) Ist die folgende Bedingung äquivalent zu denen in (a)?

(iv) Es gibt $c > 0$ derart, dass

$$|Q(\xi, \eta)| \geq c(\xi^2 + \eta^2) \text{ für alle } \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie, auf welchen Teilgebieten von \mathbb{R}^2 die Differentialgleichung

$$(1 - x^2) u_{xx} + 2xy u_{xy} + (1 - y^2) u_{yy} = f$$

hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist.

Aufgabe 3: Sei $Q(\xi)$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$ das Symbol eines Differentialoperators L von rein zweiter Ordnung in n Dimensionen mit konstanten Koeffizienten, also

$$L := Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ und wir dürfen annehmen, dass $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

- (a) Wieso darf man annehmen, dass $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$?
 (b) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:
 (i) Es gibt $c > 0$ derart, dass

$$\begin{aligned} &\text{entweder } Q(\xi) \geq c|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ &\text{oder } Q(\xi) \leq -c|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

- (ii) Die n Eigenwerte der folgenden Matrix haben das gleiche Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

- (iii) Für jedes unabhängige Paar $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ hat das Polynom $P(t) := Q(\xi + t\eta)$ zwei Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Hinweis: Symmetrische reelle Matrizen sind orthonormal diagonalisierbar. Solche $n \times n$ -Matrizen haben also n unabhängige paarweise orthonormale Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten.

Aufgabe 4 (8+2 Punkte): Für $a \in \mathbb{R}$ und Funktionen $(x, y) \mapsto u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ definieren wir den Differentialoperator L_a durch

$$L_a u = u_{xx} + 2au_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2a^2 u_y.$$

- (a) Für welches a ist L_a hyperbolisch, elliptisch, beziehungsweise parabolisch?
 (b) Geben Sie für ein von Ihnen gewähltes a die Form einer allgemeinen Lösung von $L_a u = 0$ an.

Aufgabe 5: Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$(1 - u_x^2) u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (1 - u_y^2) u_{yy} = f. \tag{1}$$

- (a) Geben Sie eine Bedingung für ∇u derart an, dass (1) hyperbolisch ist.
 (b) Geben Sie eine Bedingung für ∇u derart an, dass (1) elliptisch ist.