Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2021**
Henrik Schließauf, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 8

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 14.06.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf“.

Aufgabe 1 (4+8 Punkte)**:** Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ Funktionen mit kompaktem Träger und sei $u(x,t)$ die zugehörige Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Die Energie $\mathcal{H}(t)$ zum Zeitpunkt t kann man definieren als

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_{\text{kin}}(t) + \mathcal{H}_{\text{pot}}(t),$$

wobei $\mathcal{H}_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)\,dx$ die kinetische Energie und $\mathcal{H}_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)\,dx$ die potentielle Energie ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}(t)$ im Zeitablauf konstant bleibt.

(b) Sei weiter $R > 0$, so dass $u_0(x) = v_0(x) = 0$ für $|x| \geq R$. Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{H}_{\text{kin}}(t) = \mathcal{H}_{\text{pot}}(t)$$

für alle $t > R$ gilt. *Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ mit $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ für $|x| \geq R$ die Identität*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)\psi(x+t)\,dx = 0, \qquad \forall t > R,$$

gilt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**:** Geben Sie eine explizite Lösung für das folgende Anfangswertproblem an:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 2e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}\sin(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 3: (a) Finden Sie mit Hilfe von Charakteristiken eine Lösung zur folgenden Wellengleichung mit speziellen „Randbedingungen“:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \infty), \\ u(s,s) = 2\sin^2(s) & \text{für } s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ u_x(0,t) = \sin(t) & \text{für } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Hinweis 1: Setzen Sie zunächst $v(x,t) = (\partial_t + \partial_x)\, u(x,t)$ *und betrachten Sie das Problem*

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_x(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \infty), \\ v(s,s) = \ldots & \text{für } s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

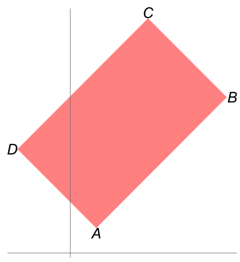
Hinweis 2: Leiten Sie mit Hilfe von v *und der Bedingung* $u_x(0,t) = \sin(t)$ *für* $t \in [0, \pi]$ *her, was für* $u(0,t)$ *gelten muss. Lösen Sie nun*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) = v(x,t) & \text{für } (x,t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \infty), \\ u(0,t) = \ldots & \text{für } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

(b) Auf welchem Gebiet $\Omega \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, \infty)$ ist die Lösung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4: Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$. Sei weiter R ein Rechteck in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ dessen Seiten parallel zu den Achsen $x - t = 0$ und $x + t = 0$ verlaufen. Die Ecken des Rechtecks bezeichnen wir mit A, B, C und D (gewählt gegen den Uhrzeigersinn). Zeigen Sie, dass gilt:

$$u(A) - u(B) + u(C) - u(D) = 0$$



Aufgabe 5: Sei $c > 0$ und $u\,(x,t)$ eine Lösung von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ für $(x,t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$U\,(x,t) = \frac{u\,(|x|\,,t)}{|x|} \tag{1}$$

eine Lösung von $U_{tt} - c^2 \Delta U = 0$ für $(x,t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times (0, \infty)$ ist.

(b) Für welche Anfangsbedingungen $u\,(x,0)$ und $u_t\,(x,0)$ ist U in (1) zu erweitern zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$?