Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2021**
Henrik Schließauf, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 9

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 21.06.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf".

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionale $F\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ Distributionen sind und geben Sie jeweils an ob diese regulär sind:

(a) $F(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx$, (c) $F(\varphi) = \varphi(-1) + \varphi'(1)$,
(b) $F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)dx$, (d) $F(\varphi) = \int_0^\infty x\varphi''(x)dx$.

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)**:** Es sei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ und $\varphi(0) \neq 0$. Welche der Folgen

$$\text{(a) } \varphi_k(x) = \frac{\varphi(x)}{k} \quad \text{(b) } \varphi_k(x) = \frac{\varphi(kx)}{k} \quad \text{(c) } \varphi_k(x) = \frac{\varphi(x/k)}{k}$$

konvergiert für $k \to \infty$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathscr{D}(\mathbb{R})$?

Aufgabe 3: (a) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-K, K]$ gilt:

$$\left| CH\frac{1}{x}(\varphi) \right| \le 2K \left\| \varphi' \right\|_{L^\infty(-K,K)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$.

(b) Zeigen Sie, dass $CH\frac{1}{x}$ eine Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass für die Ableitung $\left(CH\frac{1}{x}\right)'$ gilt

$$\left(CH\frac{1}{x}\right)'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{-1}{x^2}(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{-1}{x^2}(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \right).$$

(d) Ist die Abbildung

$$\left(CH\frac{-1}{x^2}\right)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{-1}{x^2}\varphi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{-1}{x^2}\varphi(x)\,dx \right)$$

eine Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$?

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

sowie die zugehörige Distribution

$$F_g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und bestimmen sie die Ableitung g'.

(b) Finden Sie die Ableitung $(F_g)'$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Stimmt diese mit der gewöhnlichen Ableitung im Sinne von $(F_g)' = F_{g'}$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ überein? *Hinweis: Konstruieren Sie einen Term mit dem Cauchyschen Hauptwert.*

Aufgabe 5 (10 Punkte)**:** Die Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

nennt man auch Heaviside-Funktion. Sei nun

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad E(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|).$$

Zeigen Sie, dass $(\partial_t^2 - \partial_x^2)E = \delta_{(0,0)}$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ gilt.