Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2021**
Henrik Schließauf, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 19.04.2021, um 14 Uhr.

Aufgabe 1: Wir betrachten die Funktionenfolgen

- $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = e^{-n|x|}$ und
- $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) = e^{-|x-n|}$.

Prüfen Sie jeweils:

(a) Ist diese Familie gleichmäßig beschränkt?

(b) Ist diese Familie gleichgradig stetig?

(c) Gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge?

Lösung 1: Die Folge f_n ist gleichmäßig beschränkt, aber nicht gleichgradig stetig. Es gibt keine gleichmäßig konvergente Teilfolge von f_n.

(a) Die gleichmäßig Beschränktheit folgt aus $0 \le f_n(x) = e^{-n|x|} \le 1$.

(b) Die Folge ist nicht gleichgradig stetig. Wäre sie gleichgradig stetig, dann würde gelten, dass

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in[-1,1]}\forall_{n\in\mathbb{N}} \;:\; |x-y|<\delta \implies |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon.$$

Wir zeigen also, dass

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x,y\in[-1,1]}\exists_{n\in\mathbb{N}} \;:\; \Big(|x-y|<\delta\Big) \wedge \Big(|f_n(x)-f_n(y)|\ge\varepsilon\Big).$$

Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und sei $\delta > 0$ beliebig. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < \delta$. Wir setzen nun $x = 0$ und $y = \frac{1}{n}$ mit einem solchen n. Dann folgt $|x-y| = |y| = \frac{1}{n} < \delta$. Es folgt nun weiter

$$|f_n(x)-f_n(y)| = \left|1-\exp\left(-n\tfrac{1}{n}\right)\right| = 1-\frac{1}{e}.$$

Da $e > 2$ folgt $\frac{1}{2} > \frac{1}{e}$ und damit ist $1-\frac{1}{e} > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon$. Damit ist $\{f_n\}$ nicht gleichgradig stetig.

(c) Es gilt für alle $x \in [-1,1]$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge gegen eine Grenzfunktion g gäbe, so würde sie auch punktweise gegen g konvergieren und weil f_n schon punktweise gegen f konvergiert, müsste $f \equiv g$ gelten. Aber alle f_n sind stetig und darum müsste die Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz auch stetig sein, ist sie aber nicht. Also kann auch eine beliebige Teilfolge nicht gleichmäßig konvergieren.

Die Folge g_n ist gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Sie besitzt aber keine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

(a) Die Folge ist durch 1 betraglich beschränkt, also gleichmäßig beschränkt.

(b) Sei $0 < \varepsilon < 1$, $\delta = -\ln(1-\varepsilon)$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $|x-y| < \delta$. Wir nehmen zusätzlich an, dass $|y-n| \geq |x-n|$ (für $|y-n| \leq |x-n|$ geht man analog vor). Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= |e^{-|x-n|} - e^{-|y-n|}| = e^{-|x-n|}\left|1 - e^{-|y-n|+|x-n|}\right| \leq \left|1 - e^{-|y-n|+|x-n|}\right| \\ &= 1 - e^{-||y-n|-|x-n||} \leq 1 - e^{-|x-y|} < 1 - e^{\delta} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Die Folge hat keine gleichmäßig konvergente Teilfolge, da der punktweise Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ist, aber $f_n(n) = 1$ und damit die Folge nicht gleichmäßig gegen Null konvergieren kann.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**:** Sei $L > 0$ gegeben.

$$\mathcal{F}_L := \{\, f : [0,1] \to \mathbb{R}^n \ ;\ f \text{ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante } L \,\}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{F}_L$ ist gleichmäßig beschränkt.

(b) $\mathcal{F}_L$ ist gleichgradig stetig.

Lösung 2: (a) $\mathcal{F}_L$ ist nicht gleichmäßig beschränkt: Jede konstante Funktion ist Lipschitz-stetig für jede Lipschitz-Konstante $L > 0$. Also liegen alle konstanten Funktionen in $\mathcal{F}_L$. Gäbe es nun ein $C > 0$, sodass für alle $f \in \mathcal{F}_L$ und $x \in [0,1]$

$$|f(x)| \leq C$$

gilt, so dürfte $g(x) = C + 1$ als konstante Funktion nicht in $\mathcal{F}_L$ liegen.

(b) $\mathcal{F}_L$ ist gleichgradig stetig: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$. Für alle $f \in \mathcal{F}_L$ und $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta_\varepsilon$ gilt dann wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| < L\delta_\varepsilon = \varepsilon$$

Damit ist $\mathcal{F}_L$ gleichgradig stetig.

Aufgabe 3: Gegeben seien die folgenden Funktionen $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$:

$$u_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad u_2(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad u_3(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Überlegen Sie, ob sich die Funktionen u_i zu Funktionen in $C^0(\mathbb{R})$ oder sogar $C^1(\mathbb{R})$ fortsetzen lassen.

Lösung 3: Um zu prüfen, ob eine stetige Fortsetzung existiert, müssen wir den rechtsseitigen Limes

$$a := \lim_{x\downarrow 0} u_i(x)$$

bestimmen. Nur sofern dieser existiert, kann es überhaupt eine stetig differenzierbare Fortsetzung geben. Da in diesem Fall der Funktionswert $u_i(0) = a$ der Fortsetzung eindeutig durch den obigen Limes bestimmt ist, können wir die Existenz der rechtsseitigen Ableitung mittels

$$b := \lim_{x\downarrow 0} \frac{u_i(x) - u_(0)}{x}$$

überprüfen. Nur wenn diese existiert, gibt es eine stetig differenzierbare Fortsetzung, z.B.

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & , x > 0 \\ a + bx & , x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) Wählt man $x_n = \frac{2}{n\pi}$, so erhält man eine divergierende Folge $u_1(x_n)$. Somit existiert der rechtsseitige Limes von u_1 an der Stelle 0 nicht und die Funktion ist nicht stetig fortsetzbar.

(b) Man erhält wegen der Beschränktheit vom Sinus, dass $a = 0$ gilt. Da $\lim_{x\downarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert (siehe (a)), besitzt u_2 keine rechtsseitige Ableitung in 0. Folglich gibt es nur eine stetige Fortsetzung von u_2.

(c) Man erhält direkt $a = 0$ und $b = 0$. Somit ist u_3 stetig differenzierbar fortsetzbar auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Je 1 Punkt)**:** Entscheiden Sie bei den folgenden Mengen Ω_i jeweils, ob der Rand C^0-, $C^{0,\alpha}$- oder C^1-Regularität besitzt (wobei $\alpha \in (0,1]$).

(a) $\Omega_1 = \left\{(x,y) \in (-1,1)^2 : y < \sqrt{|x|}\right\}$

(b) $\Omega_2 \left\{(x,y) \in (-1,1)^2 : y < |x|\right\}$

(c) Der Rand von Ω_3 ist durch $[0,2\pi) \ni t \mapsto ((2\cos t + 1)\cos t, (2\cos t + 1)\sin t)$ parametrisiert.

(d) $\Omega_4 = B_1(0) \setminus \{0\}$

(e) $\Omega_5 = B_2(0) \setminus \partial B_1(0)$

(f) $\Omega_6 = \{(s + t^2, t^3) : s \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}\}$

(g) Ω_7 ist die größte offene Menge innerhalb $\left\{(x,y) \in (-1,1)^2 : y < \left(\sin \frac{1}{x}\right)^2\right\}$

Lösung 4: (a) $C^{0,\frac{1}{2}}$

(b) $C^{0,1}$

(c) nicht C^0

(d) nicht C^0

(e) nicht C^0

(f) $C^{0,\frac{2}{3}}$

(g) nicht C^0

Aufgabe 5: Sei $\gamma \in (0,1)$ und seien $u, v \in C^{0,\gamma}([0,1];[0,1])$. Liegen die folgenden Funktionen dann in $C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$?

(a) $u + v$

(b) uv

(c) $u \circ v$

Lösung 5: (a) Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\frac{|(u+v)(x) - (u+v)(y)|}{|x-y|^\gamma} \le \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} + \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \le [u]_\gamma + [v]_\gamma.$$

Somit gilt $u + v \in C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$.

(b) Da u, v insbesondere stetig sind und $[0,1]$ eine kompakte Menge ist, sind $\|u\|_\infty$ und $\|v\|_\infty$ endlich. Daher gilt:

$$\frac{|(uv)(x) - (uv)(y)|}{|x-y|^\gamma} = \frac{|u(x)(v(x) - v(y)) + v(y)(u(x) - u(y))|}{|x-y|^\gamma} \le \|u\|_\infty [v]_\gamma + \|v\|_\infty [v]_\gamma$$

Insbesondere gilt $uv \in C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$.

(c) Die Funktion $u \circ v$ liegt im Allgemeinen nicht in $C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$: Wählt man $u(x) = v(x) = x^\gamma$, so ist $u, v \in C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$, denn sei ohne Einschränkung $y \in (0,x)$. Dann gilt

$$\frac{|x^\gamma - y^\gamma|}{|x-y|^\gamma} = \frac{\left|1 - \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma\right|}{\left|1 - \frac{y}{x}\right|^\gamma} \le \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = 1.$$

Es gilt $u \circ v = x^{\gamma^2}$. Wegen $\gamma^2 < \gamma$ gilt weiter

$$\frac{|u \circ v(x) - u \circ v(0)|}{|x-0|^\gamma} = x^{\gamma^2 - \gamma} \xrightarrow{x \to 0} \infty.$$

Folglich gilt $u \circ v \notin C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$.
Allgemein findet man für $u \in C^{0,\alpha}$ und $v \in C^{0,\beta}$ (mit entsprechend passendem Definitionsbereich), dass $u \circ v \in C^{0,\alpha\beta}$.

Aufgabe 6 (3+3+3 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

(a) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\bar{\Omega}), C^{0,1}(\bar{\Omega}), C^1(\bar{\Omega})$ an.

(b) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\Omega), C^{0,1}(\Omega), C^1(\Omega)$ an.

(c) In welcher wichtigen Eigenschaft unterscheiden sich $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ und $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0})$?

Lösung 6: (a) Eine differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn Ihre Ableitung beschränkt ist. Daher gilt auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}$: stetig differenzierbar $\Rightarrow$ Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ stetig. D.h. es gilt $C^1(\bar{\Omega}) \subset C^{0,1}(\bar{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega})$.

(b) Stetig differenzierbare Funktionen mit offenem Definitionsbereich können unbeschränkte Ableitungen haben (vgl. z.B. $1/x$ auf $(0,1)$). Daher gilt nur noch $C^{0,1}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ und $C^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.

(c) Der Raum $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ ist nach dem Vorlesungsskript vollständig, $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0})$ ist es hingegen nicht:

Um das zu zeigen wählen wir $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Dann gilt $f_n \in C^1([-1,1])$ für alle n. Des weiteren erhält man für $m, n \in \mathbb{N}$ nach den binomischen Regeln

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{m}} \right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{\left| \left(x^2 + \frac{1}{n}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{m}\right) \right|} = \sqrt{\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|},$$

denn für $a, b > 0$ gilt

$$|a-b|^2 \leq |(a-b)(a+b)| = |a^2 - b^2|.$$

Da $\frac{1}{n}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, ist somit auch f_n eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{C^0}$. Der Grenzwert $f(x) = |x|$ liegt aber nicht in $C^1([-1,1])$.

Aufgabe 7: Überlegen Sie sich ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $u \in C^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, so dass u nicht zu einer Funktion in $C^0(\bar{\Omega})$ fortgesetzt werden kann.
Gibt es so eine Funktion auch für $\Omega = B_1(0)$?

Lösung 7: (a) Sei $\Omega = (-1,1)^2 \setminus ([0,1) \times \{0\})$ und sei weiter

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & x, y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

f ist offensichtlich partiell differenzierbar auf Ω, aber wegen $\lim_{y \downarrow 0} f(\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{4}$ und $\lim_{y \uparrow 0} f(\frac{1}{2}, y) = 0$ nicht stetig auf $\bar{\Omega} = [-1,1]^2$ fortsetzbar.
Man beachte hier, dass bei Mengen ohne C^0-Rand nicht notwendigerweise $\Omega^\circ = \bar{\Omega}^\circ$ gilt. Man kann aber zeigen, dass Mengen mit C^0-Rand relativ offen sind.

(b) Angenommen dies wäre nicht so, dann müsste es ein $x_0 \in \partial\Omega$ geben, so dass der Grenzwert $\lim_{x \to x0} f(x)$ nicht existiert.
Weil f beschränkt ist, gibt es nach Bolzano-Weierstraß also zwei Folgen $x_n, y_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$, so dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = z_1$ und $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = z_2$, wobei $z_1 \neq z_2$.
Entwickelt man nach der Taylorformel an der Stelle x_n erhält man

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) \cdot \nabla f(\xi)$$

für $x \in B_1(0)$ mit einem passenden ξ zwischen x und x_n, welches wegen der Konvexität von $B_1(0)$ wieder in der Menge liegt. Also folgt

$$|f(y_n) - f(x_n)| \leq |x_n - y_n| \sup_{x \in \Omega} |\nabla f| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

und damit folgt $z_1 = z_2$ im Widerspruch zur Annahme. Also lässt sich die Funktion stetig auf den Rand fortsetzen.
Anhand des Beweises würde man annehmen, dass die Menge konvex sein muss, aber mit etwas Bastelei genügt auch ein C^0-Rand.