Blatt 10

Aufg. 1

a) Kirchhoff $\rightsquigarrow$ $u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y-x|=t} \left(t\, u_1(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x) \right) d\sigma_y$

Sei $R > 0$ s.d. $\operatorname{supp} u_0, \operatorname{supp} u_1 \subset B_R(0)$.

Für $t \leq 1$ gilt:

$$|u(x,t)| \leq \left(\|u_1\|_\infty + \|u_0\|_\infty + \|\nabla u_0\|_\infty \right) \underbrace{\frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y-x|=t} d\sigma_y}_{=1}$$

$$\leq \frac{2\left(\|u_1\|_{C^0} + \|u_0\|_{C^1} \right)}{1+t}$$

Für $t > 1$ gilt:

$$|u(x,t)| \leq \left(t\, \|u_1\|_\infty + \|u_0\|_\infty + t\, \|\nabla u_0\|_\infty \right) \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\substack{|y-x|=t \\ y \in B_R(0)}} d\sigma_y$$

Hinweis $\rightarrow$ $\leq \left(t\, \|u_1\|_\infty + t\, \|u_0\|_{C^1} \right) \frac{R^2}{t^2}$

$$\leq \frac{2R^2 \left(\|u_1\|_{C^0} + \|u_0\|_{C^1} \right)}{1+t}$$

b) $v = 1 - e^{-u}$

$\rightsquigarrow v_t = e^{-u} u_t$ und $v_{tt} = e^{-u} \left(u_{tt} - u_t^2 \right)$

Analog für Ableitung in x

$\Rightarrow v_{tt} - \Delta v = e^{-u} \left(u_{tt} - u_t^2 - \Delta u + |\nabla u|^2 \right)$

Für die Anfangswerte gilt:

$$v(x,0) = v_0(x) := 1 - e^{-u(x,0)} = 1 - e^{-\varepsilon u_0(x)}$$

$$v_t(x,0) = v_1(x) := e^{-u(x,0)} u_t(x,0) = e^{-\varepsilon u_0(x)} \varepsilon u_1(x)$$

Es gilt $v_0 \in C^3$, $v_1 \in C^2$ und $\operatorname{supp} v_0, \operatorname{supp} v_1 \subset \overline{B_R(0)}$.

Zudem $\nabla v_0 = \varepsilon e^{-\varepsilon u_0(x)} \nabla u_0$ und somit

$$\| v_0 \|_{C^1} + \| v_1 \|_{C^0} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Sei also $v(x,t)$ die Lsg. von

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \\ v_t(x,0) = v_1(x) \end{cases}$$

Wegen a) gilt für ε hinr. klein

$$\| v(\cdot,t) \|_\infty < 1 \quad \forall t \geq 0$$

Dann liefert $u(x,t) = -\ln(1 - v(x,t))$ die eindeutige C^2-Lösung.

Aufg. 2

Seien u_1 und u_2 Lösungen, dann ist $u = u_1 - u_2$ Lsg von

$$\begin{cases} t\,u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{in } \Omega \times [0,\infty) \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\infty) \end{cases}$$

Sei $E(t) = \int_\Omega \left(t\,u_t^2 + |\nabla u|^2 \right) dx$

$$\leadsto E'(t) = \int_\Omega \left(u_t^2 + 2t\,u_t\,u_{tt} + 2\,\nabla u \cdot \nabla u_t \right) dx$$

$$= \int_\Omega u_t^2\,dx + 2 \int_\Omega u_t \underbrace{\left(t\,u_{tt} - \Delta u \right)}_{=0} dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{u_t}_{=0} \nabla u \cdot \nu \, d\sigma_x$$

da $u(x,t) = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle t

$$= \int_\Omega u_t^2\,dx \leq \frac{E(t)}{t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E(t)}{t} \right)' = \frac{E'(t)}{t} - \frac{E(t)}{t^2} \leq 0$$

Insb. folgt für $t_0 \geq 0$

$$(*) \qquad 0 \leq E(t) \leq \frac{E(t_0)}{t_0}\,t \qquad \forall t > t_0$$

Die Fkt. $w(x) = u(x,0)$ ist C^2-Lsg. von

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{in } \Omega \\ w = 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ w ist harmonisch und nimmt ihre Extrema am Rand an.

$\Rightarrow$ $w \equiv 0$ in Ω und auch $\nabla w \equiv 0$ in Ω

Mit $u \in C^2$ und Taylor folgt

$$u_t(x,t) = \underbrace{u_t(x,0)}_{=0} + u_{tt}(x,0) \cdot t + o(t) = \mathcal{O}(t)$$

und

$$\nabla u(x,t) = \underbrace{\nabla u(x,0)}_{=\nabla w = 0} + \nabla u_t(x,0) \cdot t + o(t) = \mathcal{O}(t)$$

$$\Rightarrow E(t) = \int_\Omega \left(t\, u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dx = \int_\Omega \left(\mathcal{O}(t^3) + \mathcal{O}(t^2)\right) dx = \mathcal{O}(t^2)$$

Insb. folgt $\lim\limits_{t_0 \downarrow 0} \frac{E(t_0)}{t_0} = 0$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} E(t) \equiv 0$$

Also $u_t(x,t) \equiv 0$ und $\nabla u(x,t) \equiv 0$

$\Rightarrow$ $u \equiv 0$

Aufg. 3

a) Ang. u_1, u_2 sind zwei Lösungen. Setze $u = u_1 - u_2$ und

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B_\pi(0)} \left(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \right) dx$$

$$\rightsquigarrow E'(t) = \int_B \left(u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t + u u_t \right) dx$$

$$= \int_B u_t \underbrace{\left(u_{tt} - \Delta u + u \right)}_{=0} dx + \int_{\partial B} u_t \nabla u \cdot \nu \, d\sigma_x$$

$= 0$ auf ∂B, da $u(x,t) = 0$ auf $\partial B \times [0,\infty)$

$$= 0$$

$$\Rightarrow E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_B \Big(\underbrace{u_t(x,0)^2}_{=0} + \underbrace{|\nabla u(x,0)|^2}_{=0} + \underbrace{u(x,0)^2}_{=0} \Big) dx = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in B_\pi(0) \times [0,\infty)$$

$$\Rightarrow u_1 \equiv u_2$$

b) u_0 radial-symmetr. $\rightsquigarrow$ Für $r = |x| > 0$ gilt

$$-\Delta u_0(x) = -r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r \frac{\sin r}{r} = -r^{-2} \partial_r r^2 \left(\frac{\cos r}{r} - \frac{\sin r}{r^2} \right)$$

$$= -r^{-2} \partial_r (r \cos r - \sin r) = -r^{-2} (\cos r - r \sin r - \cos r)$$

$$= \frac{\sin r}{r} = \frac{\sin |x|}{|x|} = u_0(x)$$

c) Der Ansatz $u(x,t) = \alpha(t)\, u_0(x)$ liefert

$$u_{tt} - \Delta u + u = \left(\alpha''(t) + \alpha(t) + \alpha(t)\right) \underbrace{u_0(x)}_{\neq 0 \text{ in } B_\pi(0)}$$

$\alpha'' + 2\alpha = 0 \rightsquigarrow \alpha(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}t) + C_2 \cos(\sqrt{2}t)$

$u(x,0) = u_0(x) \quad \Rightarrow \alpha(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$

$u_t(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{2}\, C_1 = 0$

$\Rightarrow u(x,t) = \cos(\sqrt{2}t) \dfrac{\sin|x|}{|x|}$ ist die eind. Lsg.

Aufg. 4

a) Sei $R \in SO(n)$ eine Rotationsmatrix,

d.h. $R^T R = I$ und $\det R = 1$

Sei weiter $u(x,t)$ eine Lsg. des Systems und

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t) - u(Rx,t)$$

Es gilt $\frac{\partial}{\partial x_k} u(Rx,t) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u(Rx,t) R_{ik}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 u(Rx,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_j} u(Rx,t) R_{ik} R_{jk}$$

$$\Rightarrow \Delta\big(u(Rx,t)\big) = \sum_{i,j} \partial_{x_i}\partial_{x_j} u(Rx,t) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} R_{ik} R_{jk}}_{=\delta_{ij}}$$

$$= \Delta u(Rx,t)$$

$\Rightarrow \hat{u}$ löst $\Delta \hat{u} = 0$, $\hat{u}(x,0) = \hat{u}_t(x,0) = 0$

$\Rightarrow \hat{u} \equiv 0$ $\Rightarrow u$ radial-symmetr.

b) Für $n = 2,3$ „ausdämpfende Welle",

d.h. $|u| = \mathcal{O}\left(\frac{\|u_0\|_{C^1} + \|v_0\|_\infty}{t}\right)$

$\Rightarrow$ zweites Bild $n=1$ („laufende Welle)

Da $n=2$ ausgefüllter Einflusskegel

erstes Bild vmtl. $n=3$