Blatt 11

Aufg. 1

a) $E'(t) = 2\int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx = 2\int_\Omega u\, \Delta u\, dx$

$\overset{\text{p.I.}}{=} 2\int_{\partial\Omega} u\, \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{\substack{=0 \\ \text{nach Randbed.}}}\, d\sigma_x - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 0$

$E''(t) = -4\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t\, dx$

$\overset{\text{p.I.}}{=} -4\int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{=0}\, u_t\, d\sigma_x + 4\int_\Omega \Delta u\, u_t\, dx$

$= 4\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \geq 0$

b) $E' \leq 0$ und E' mon. steigend $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} E'(t) = c \leq 0$

Ang. $c < 0$, dann gilt $E'(t) \leq c < 0 \quad \forall t > 0$

$\Rightarrow E(t) \leq E(0) + ct \xrightarrow{t\to\infty} -\infty \quad ↯ \; E(t) \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} E'(t) = 0$

c) Ang. $|\nabla u(\cdot,t)|$ konv. nicht glm. gegen 0,

dann ex. eine Teilfolge (t_k) und $\alpha > 0$ s.d.

$$\|\nabla u(\cdot, t_k)\|_\infty \geq \alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Nach Voraussetzung ist $\{|\nabla u(\cdot, t_k)|\}_k$ gleichm. beschränkt und wegen der glm. Beschränktheit der zweiten Ableitungen sogar gleichgradig stetig

$\rightsquigarrow$ Arzela-Ascoli liefert eine Teilf. (O.E. die ganze Folge) die glm. konv.

$$\Rightarrow \lim_{t_k \to \infty} |\nabla u(x, t_k)| = g(x) \quad \text{mit} \quad g \in C(\overline{\Omega})$$

Aber

$$\int_\Omega g(x)^2 \, dx = \lim_{t_k \to \infty} \int_\Omega |\nabla u(x, t_k)|^2 dx \overset{b)}{=} 0$$

$$\Rightarrow g \equiv 0 \quad \lightning \text{ zu } \lim \|\nabla u(\cdot, t_k)\|_\infty \geq \alpha > 0$$

d) $M'(t) = \int_\Omega u_t(x,t)\,dx = \int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \, d\sigma_x = 0$

e) Wie in c) kann man zeigen, dass $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = h(x)$ glm.

Wegen c) gilt dann auch

$$\nabla h(x) = \lim_{t\to\infty} \nabla u(x,t) = 0$$

$$\Rightarrow h(x) \equiv c$$

Wegen $M'(t) = 0$ folgt zudem

$$\int_\Omega u_0(x)\,dx = M(0) = \lim_{t\to\infty} M(t) = \int_\Omega h(x)\,dx = c\,|\Omega|$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x)\,dx$$

f) In einem isolierten Körper nähert sich mit der Zeit die Temperatur überall der (anfänglichen) Durchschnittstemp. an.

Aufgabe 2

Ansatz $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$

$$\rightsquigarrow f = u_t - \Delta u + cu$$

$$= e^{\alpha t} v_t + \alpha e^{\alpha t} v - e^{\alpha t} \Delta v + c e^{\alpha t} v$$

$$= e^{\alpha t} \left(v_t - \Delta v + (\alpha + c) v \right)$$

Für $\alpha = -c$ folgt

$$v_t - \Delta v = e^{ct} f$$

$$v(x,0) = u(x,0) = u_0(x)$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy + \int_{s=0}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{cs - \frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s) dy ds$$

und $u(x,t) = e^{-ct} v(x,t)$ liefert die Formel

Aufg. 3

a) Sei $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (Diffusionskern)

$\rightarrow u(x,t) = -4\sqrt{\pi} \frac{\partial}{\partial x} p(x,t)$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \left|\frac{\partial}{\partial x}\right|^2\right) u(x,t) = -4\sqrt{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \left|\frac{\partial}{\partial x}\right|^2\right) p(x,t) = 0$

b) $x = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$

$x > 0 \Rightarrow \lim_{t\downarrow 0} \frac{x}{t\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = \frac{8}{x^2} \lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{x^2}{4t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$

$= \frac{8}{x^2} \lim_{s\to\infty} s^{3/2} e^{-s} = 0$

$x < 0 \Rightarrow \lim_{t\downarrow 0} \frac{x}{t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) = -\frac{8}{x^2} \lim_{s\to\infty} s^{3/2} e^{-s} = 0$

c) Nein, denn u lässt sich zu keiner Fkt. in $C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ fortsetzen:

$\lim_{t\downarrow 0} u(t,t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{t}{4}\right) = \infty$

d) $\lim_{t\downarrow 0} F_{u(\cdot,t)}(\varphi) = \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right) \varphi(x)\, dx$

$\overset{\text{p.I.}}{=} \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{x^2}{4t}\right) \varphi'(x)\, dx = \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} 4\, e^{-y^2} \varphi'(2\sqrt{t}y)\, dy$

major. Konv. $\overset{\text{}}{=} 4\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi'(0)\, dy = 4\sqrt{\pi}\, \varphi'(0) = -4\sqrt{\pi}\, \delta'(\varphi)$

Aufg. 4

a) Maximumprizip (MP):

$f \geq 0 \Rightarrow u$ nimmt Min. auf $\partial_p((0,1)\times(0,\infty))$ an

Betrachte die symm. Fortsetzung

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & x \in [0,1] \\ u(2-x,t), & x \in (1,2] \end{cases}$$

$\hat{u} \in C^2([0,2]\times[0,\infty))$, denn:

$$\lim_{x\downarrow 1} \hat{u}_x(x,t) = -\lim_{x\downarrow 1} u_x(2-x,t) = -0 = \hat{u}_x(1,t)$$

$$\lim_{x\downarrow 1} \hat{u}_{xx}(x,t) = \lim_{x\downarrow 1} u_{xx}(2-x,t) = u_{xx}(1,t) = \hat{u}_{xx}(1,t)$$

$$\lim_{x\downarrow 1} \hat{u}_{xt}(x,t) = \cancel{\lim_{x\downarrow 1} \frac{d}{dt} u_x(x,t)} - \lim_{x\downarrow 1} u_{xt}(2-x,t)$$

$$= -u_{xt}(1,t) = -\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{u_x(1,t)}_{=0}\Big) = 0 = \hat{u}_{xt}(1,t)$$

Analog für $\hat{f} \in C^2([0,2]\times[0,\infty))$.

$\rightarrow \hat{u}$ ist Lsg. von
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \hat{f}, & \text{in } (0,2)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = x(2-x), & x \in (0,2) \\ u(0,t) = 0, & t>0 \\ u(2,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{u}$ nimmt Min. auf $\partial_p((0,2)\times(0,\infty))$ an

$$\min_{\substack{x\in[0,1] \\ t\geq 0}} u(x,t) = \min_{\substack{x\in[0,2] \\ t\geq 0}} \hat{u}(x,t) = 0$$

b) $u_0(x) = x(2-x) \quad \rightsquigarrow \quad \max\limits_{x\in[0,2]} u_0(x) = u_0(1) = 1$

$$\text{MP} \Rightarrow \sup_{\substack{x\in(0,1)\\ t>0}} u(x,t) = \max_{\partial_p((0,2)\times(0,\infty))} \hat{u}(x,t) = u(1,0) = 1$$

c) Wegen $u_{xx} = -2$ ist es eine Lsg.

Zudem ist die Lsg. eindeutig, denn ang. es gabe zwei versch. Lsg. u_1, u_2.

Dann liefert $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ zwei versch. Lsg. des erw. Problems, aber das widerspricht dem MP.

d) Definiere $u^*(x,t) = x(2-x) - u(x,t)$

$$\overset{c)}{\Rightarrow} u_t^* - u_{xx}^* = 2 - f > 0$$

$$\overset{a}{\Rightarrow} u_* \geq 0, \quad \text{also} \quad u(x,t) \leq x(2-x)$$

$$\rightsquigarrow 1 = u(1,0) \leq \sup u(x,t) \leq \sup x(2-x) = 1$$