Blatt 12

Aufg. 1

Sei $v(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$.

$\rightarrow \quad v_t - \Delta v = 0 \quad$ und $\quad v(x,0) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

Da v_1, v_2 beschränkt sind, ist auch v beschränkt und erfüllt die Wachstumsbed.

$$|v(x,t)| \leq (\|v_1\|_\infty + \|v_2\|_\infty)\, e^{|x|^2}$$

$$\overset{MP}{\Rightarrow} \sup\{v(x,t) : x \in \mathbb{R}^3, t > 0\} = \sup\{v(x,0) : x \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\Rightarrow v(x,t) \leq 0$$

Entw. $v(x,t) < 0 \quad \forall \substack{t>0 \\ x \in \mathbb{R}^3}$ oder es gibt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ mit $v(x_0,t_0) = 0$. Mit dem M.P. für beschr. Gebiete folgt dass $v \equiv 0$ auf $B_r(x_0) \times [0, t_0] \quad \forall r > 0$

Insb. folgt $\quad v(x,t_0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\rightarrow v \text{ löst } \begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & \mathbb{R}^3 \times (t_0, \infty) \\ v(x,t_0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Da $v \equiv 0$ die eind. Lsg. ist, folgt $v(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$.

Aufg. 2

a) Einsetzen liefert

$$-\sigma v'(x-\sigma t)+6v(x-\sigma t)v'(x-\sigma t)+v'''(x-\sigma t)=0$$

Die gew. DGL ist also

$$\sigma v'(s)+6v(s)v'(s)+v'''(s)=0$$

b) $$-\sigma v'(s)+6v(s)v'(s)+v'''(s)=\frac{d}{ds}\left(-\sigma v(s)+3v(s)^2+v''(s)\right),$$

also $F(x,y,z)=-\sigma z+3z^2+x$

c) $$v'(s)F(v'',v',v)=c_1 v'(s)$$

$$\Leftrightarrow -v'(s)\sigma v(s)+v'(s)3v(s)^2+v'(s)v''(s)=c_1 v'(s)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left(-\frac{\sigma}{2}v(s)^2+v(s)^3+\frac{1}{2}v'(s)^2-c_1v(s)\right)=0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma}{2}v(s)^2+v(s)^3+\frac{1}{2}v'(s)^2-c_1v(s)=c_2$$

d) $$v'(s)=\pm\sqrt{2c_2+\sigma v(s)^2-2v(s)^3+2c_1v(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{v'(s)}{\sqrt{2c_2+\sigma v(s)^2-2v(s)^3+2c_1v(s)}}=\pm 1$$

$$\Rightarrow \int_{v(s_0)}^{v(s)} \frac{1}{\sqrt{2c_2+\sigma v^2-2v^3+2c_1 v}}\, dv = \pm (s-s_0)$$

e) $u(x,t) = v(x-\sigma t)$ liefert

$$v(s) = \frac{\sigma}{2\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s-c)\right)\right)^2}$$

Es gilt

$$-\frac{\sigma}{2} v(s)^2 = -\frac{\sigma^3}{8\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s-c)\right)^4}$$

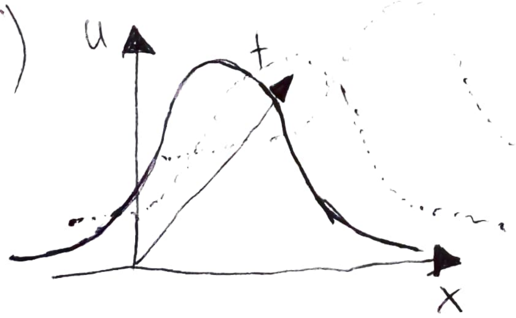
$$v(s)^3 = \frac{\sigma^3}{8\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s-c)\right)^6}$$

$$\frac{1}{2} v'(s)^2 = \frac{\sigma^3 \sinh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s-c)\right)^2}{8\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s-c)\right)^6}$$

$$= \frac{\sigma^3}{8\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s-c)\right)^4} - \frac{\sigma^3}{8\cosh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s-c)\right)^6}$$

Also erfüllt $v(s)$ die Gleichung aus c) mit $c_1 = c_2 = 0$

f)



Der „Hügel" wandert für $t \to \infty$ nach rechts.

Je größer/kleiner c desto weiter verschiebt sich der Hügel nach rechts/links

Je größer σ, desto höher wird der Hügel, aber auch schmaler.

Aufg. 3

a) Die Fkt. $w \mapsto (w)^+$ mit $w \in \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig mit Konst. 1.

Die Funktionen

$$(x,t) \mapsto t^{-3/5}, \qquad (x,t) \mapsto R - \frac{1}{20}\frac{|x|^2}{t^{2/5}}$$

sind in $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ und somit lok. Lipschitz

$\Rightarrow$ u als Komposition von lok. Lipschitz Fkt. selbst lok. Lipschitz

Da $g(w) = ((w)^+)^2$ C^1 ist und $g'(w) = 2(w)^+$

folgt mit den gleich Argument sogar $u^2 \in C^1 \cap C^{1,1}_{loc}$

b) Es gilt

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) : u(x,t) \neq 0\}}$$

$$= \overline{\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) : 20\, t^{2/5} R > |x|^2\}}$$

$$= \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) : t \geq \frac{|x|^5}{(20R)^{5/2}}\}$$

c) Für $R - \frac{1}{20}\frac{|x|^2}{t^{2/5}} > 0$ ist $u^2 \in C^2$ und

(1) $u_t = -\frac{3}{5} R t^{-8/5} + \frac{1}{20} t^{-2} |x|^2$

(2) $\nabla_x u(x,t)^2 = -\frac{1}{5} t^{-8/5} \left(R - \frac{1}{20}\frac{|x|^2}{t^{2/5}}\right) x$

(3) $\Delta_x u(x,t)^2 = -\frac{3}{5} t^{-8/5} + \frac{1}{20} t^{-2} |x|^2$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^3 \times [T,\infty)$ für ein $T>0$

$$\Rightarrow -\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^\infty \varphi_t(x,t)\, u(x,t)\, dt\, dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\max\left\{T, \frac{|x|^5}{(20R)^{5/2}}\right\}}^\infty \varphi_t(x,t)u(x,t)\, dt\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\int_T^\infty \varphi(x,t)\, u_t(x,t)\, dt\, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\varphi(x,t)\,u(x,t)\Big|_{t=\max\left\{T, \frac{|x|^5}{(20R)^{5/2}}\right\}}^{\infty}}_{=0} dx$$

und

$$\int_T^\infty\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot \nabla u^2\, dx\, dt = \int_T^\infty \int_{B_{\sqrt{20R}\,t^{1/5}}(0)} \nabla\varphi \cdot \nabla u^2\, dx\, dt$$

$$= -\int_T^\infty\int_{\mathbb{R}^3} \varphi\, \underbrace{\Delta u^2}_{=u_t}\, dx\, dt + \int_T^\infty \underbrace{\int_{|x|=\sqrt{20R}\,t^{1/5}} \varphi(x,t)\, \nabla\left(u(x,t)^2\right) \cdot \frac{x}{|x|}\, d\sigma_x}_{=0}\, dt$$

d) Für $x=0$ gilt $\lim_{t\downarrow 0} u(0,t) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-3/5} R = \infty$

Für $x \neq 0$ gilt $u(x,t)=0$ falls $t < \frac{|x|^5}{(20R)^{5/2}} \Rightarrow \lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = 0$

e) Nein, als Gegenbsp. betrachte

$$v_1(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{3/5}}\left(R_1 - \frac{1}{20}\frac{|x|^2}{(t+1)^{3/5}}\right)^+, \qquad v_2(x,t) = \frac{1}{(t+1)^{3/5}}\left(R_2 - \frac{1}{20}\frac{|x|^2}{(t+1)^{3/5}}\right)^+$$

mit $R_2 > R_1$

Aufg. 4

a) $$E'(t) = \int_\Omega 2u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx$$

$$= \int_\Omega 2u(x,t)\, \Delta\left(u(x,t)^m\right) dx$$

$$\overset{p.I}{=} -\int_\Omega 2\nabla u(x,t) \cdot \nabla\left(u(x,t)^m\right) dx + \int_{\partial\Omega} 2u(x,t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial n}(u^m)}_{=0} d\sigma_x$$

$$= -\int_\Omega 2\, |\nabla u(x,t)|^2 \cdot m\, \underbrace{u(x,t)^{m-1}}_{\geq 0 \text{ nach Vor.}} dx \leq 0$$

b) Ang. es ex. $x_0 \in \Omega$: $u_\infty(x_0) > 0$

Wegen $u_\infty(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$ gibt es dann $\Omega_0 \subset \Omega$

mit $u_\infty(x) \geq \frac{u_\infty(x_0)}{2}$ auf Ω_0 und $u_\infty(x)\big|_{\partial\Omega_0} = \frac{u_\infty(x_0)}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} E'(t) \overset{C^1\text{-Konv.}}{=} -\int_\Omega 2\, |\nabla u_\infty(x)|^2\, m\, u_\infty(x)^{m-1} dx$$

$$\leq -\int_{\Omega_0} 2\, |\nabla u_\infty(x)|^2\, m \left(\frac{u_\infty(x_0)}{2}\right)^{m-1} dx \leq -C < 0$$

Aber dann folgt $\lim_{t\to\infty} E(t) = -\infty$ ↯