Prof. Dr. Guido Sweers
Henrik Schließauf, M.Sc. **SoSe 2021**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 26.04.2021, um 14 Uhr. Bitte beachten Sie, dass auch nur Ihre Bearbeitung der pepunkteten Aufgaben korrigiert wird.

Aufgabe 1: Im Skript findet man $v(x_1, x_2) = \dfrac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$. Zeigen Sie, dass

$$u(x_1, x_2) := (x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1})\, v(x_1, x_2)$$

auch eine Lösung von dem folgenden Randwertproblem ist:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{für } x \in B_1(0)\,, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0) \setminus \{(1,0)\}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Lösung 1: Man kann nachrechnen, dass v eine Lösung des Problems (1) ist. (Das ist Aufgabe 1.2 aus dem Skript.) Damit erhält man für $(x_1, x_2) \in B_1(0)$:

$$\begin{aligned} \Delta u(x_1,x_2) &= \left(\partial^2_{x_1x_1} + \partial^2_{x_2x_2}\right)(x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1})\, v(x_1,x_2) \\ &= \left[\partial_{x_1}\left(\partial_{x_2} + x_1\partial^2_{x_1x_2} - x_2\partial^2_{x_1x_1}\right) + \partial_{x_2}\left(x_1\partial^2_{x_2x_2} - \partial_{x_1} - x_2\partial^2_{x_1x_2}\right)\right] v(x_1,x_2) \\ &= \left(2\partial^2_{x_1x_2} + x_1\partial^3_{x_1x_1x_2} - x_2\partial^3_{x_1x_1x_1} + x_1\partial^3_{x_2x_2x_2} - 2\partial^2_{x_1x_2} - x_2\partial^3_{x_1x_2x_2}\right) v(x_1,x_2) \\ &= (x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1})\left(\partial^2_{x_1x_1} + \partial^2_{x_2x_2}\right) v(x_1,x_2) \\ &= (x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1})\, \Delta v(x_1,x_2) = 0 \end{aligned}$$

Für die Randbedingung rechnet man nach:

$$u(x_1,x_2) = \frac{-2x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)}{\left((x_1-1)^2 + x_2^2\right)^2}$$

Damit erfüllt u auch die Randbedingung.

Alternativ kann man die Randbedingung via Polarkoordinaten leichter nachrechnen: Für

$$\tilde v(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1 - r^2}{(1 - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$$

gilt:

$$\partial_\varphi \tilde v(r,\varphi) = (-r\sin\varphi\,\partial_{x_1} + r\cos\varphi\,\partial_{x_2})\, v(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Setzt man nun $r = 1$ in

$$\partial_\varphi \tilde v(r,\varphi) = (1-r^2)\partial_\varphi\left(\frac{1}{(1 - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}\right) = (1-r^2)\frac{-2r\sin\varphi}{\left((1 - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\right)^2}$$

ein, so folgt die Randbedingung.

Aufgabe 2: Für welche $\alpha \in [0,1]$ sind die folgenden Funktionen in $C^{0,\alpha}([0,1])$?

(a) $f_1(x) = x^\beta$ mit $\beta \in [0, \infty)$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} -x\ln(x) & \text{für } x \in (0,1]\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$

Lösung 2: (a) Für $\alpha > \beta$ ist

$$\frac{|f_1(x) - f_1(0)|}{|x-0|^\alpha} = x^{\beta-\alpha}$$

für $x \downarrow 0$ unbeschränkt. Daher dürfen wir $\alpha \leq \beta$ annehmnen. Ohne Einschränkung sei nun $0 < y < x < 1$. Dann gilt

$$\frac{|f_1(x) - f_1(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{|x^\beta - y^\beta|}{|x-y|^\alpha} = x^{\beta-\alpha}\frac{\left|1-\left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right|}{\left|1-\frac{y}{x}\right|^\alpha}$$

Nun ist $0 < \frac{y}{x} < 1$ und damit $0 < 1 - \frac{y}{x} < 1$. Also ist $\left|1-\frac{y}{x}\right|^\alpha \geq 1 - \frac{y}{x}$. Außerdem gilt für $0 \leq \beta \leq 1$, dass $\left(\frac{y}{x}\right)^\beta \geq \left(\frac{y}{x}\right)$ und damit $1 - \left(\frac{y}{x}\right)^\beta \leq 1 - \frac{y}{x}$ ist. Zusammen ergibt sich für $0 \leq 1 \leq \beta$:

$$\frac{|f_1(x) - f_1(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{|x^\beta - y^\beta|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{1-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = 1$$

Also ist die Funktion Hölderstetig für alle $\alpha \leq \beta \leq 1$.

Ist $\beta > 1$ so ist f_1 Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante β, da $f_1'(x) = \beta x^{\beta-1}$ und es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (y,x)$ gibt, sodass

$$\left|x^\beta - y^\beta\right| = |f_1'(\xi)|\,|x-y| \leq \beta\,|x-y|\ .$$

Damit gilt dann

$$\frac{|f_1(x) - f_1(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \beta\frac{|x-y|}{|x-y|^\alpha} \leq \beta\,.$$

Also ist f_1 auch für $\beta > 1$ und $\alpha \in [0,1]$ Hölder-stetig.

(b) Mit

$$\frac{|f_2(x) - f_2(0)|}{|x-0|^\alpha} = x^{1-\alpha}(-\ln(x))$$

sieht man direkt, dass dies für $\alpha = 1$ unbeschränkt ist, für $\alpha < 1$ aber beschränkt. Betrachte also $\alpha < 1$ und sei ohne Einschränkung $0 < y \leq x \leq 1$. Dann gilt

$$|f_2(x) - f_2(y)| = \left|\int_y^x f_2'(t)\,dt\right| \leq \int_y^x 1\,|f_2'(t)|\,dt \leq \left(\int_y^x |f_2'(t)|^{\frac{1}{1-\alpha}}\,dt\right)^{1-\alpha}\left(\int_y^x 1^{\frac{1}{\alpha}}\,dt\right)^\alpha,$$

wobei im letzten Schritt die Hölder-Ungleichung verwendet wurde. Um deren Anwendung zu rechtfertigen müssen wir nachweisen, dass $|f_2'| \in L^{\frac{1}{1-\alpha}}([0,1])$. Es gilt aber gerade

$$\int_0^1 |f_2'(t)|^{\frac{1}{1-\alpha}}\,dt = \int_0^1 |-\ln(t) - 1|^{\frac{1}{1-\alpha}}\,dt = \int_0^\infty |w-1|^{\frac{1}{1-\alpha}}\,e^{-w}\,dw =: C < \infty.$$

Einsetzen in die obige Abschätzung liefert

$$|f_2(x) - f_2(y)| \leq C^{1-\alpha}|x-y|^\alpha.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{0<x<y<1} \frac{x}{y}\ d(x,y)$

(b) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} (2x^2+y^2)\ d(x,y)$

Lösung 3: (a) Wenn man zuerst nach x integriert, dann bewegt sich x in den Grenzen von 0 bis y. Nun darf y jeden Wert von 0 bis 1 annehmen, da die Bedingung an x dafür sorgt, dass dann $0 < x < y < 1$. Also erhält man

$$\int_{0<x<y<1} \frac{x}{y} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{x}{y}\ dx \right)\ dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 \frac{1}{y} \right]_0^y\ dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y\ dy = \frac{1}{4}$$

(b) Es ist hilfreich hier Polarkoordinaten zu verwenden: $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = f(r,\varphi)$. Da

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2 \leq 1\} = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\ ;\ r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]\}$ folgt mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2\leq 1} (2x^2+y^2)\ d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2r^2\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\varphi)^2 \right) r\ drd\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^3\cos(\varphi)^2 + r^3 \right)\ drd\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)^2\ d\varphi + 2\pi \right) \end{aligned}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten das Integral über $\cos(\varphi)^2$ auszurechnen. Mithilfe der Additionstheoreme $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 = 2\cos(\varphi)^2 - 1$ folgt $\cos(\varphi)^2 = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}$ und damit gilt

$$\int_{x^2+y^2\leq 1} (2x^2+y^2)\ d(x,y) = \frac{1}{4} \left(\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} + 2\pi \right) = \frac{3}{4}\pi.$$

Aufgabe 4: Sei $X = \{(x,y) \in (0,1)^2 : x + y < 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_X e^{\frac{y}{x+y}} d(x,y).$$

Hinweis: $(u,v) = \left(x + y, \frac{y}{x+y}\right)$

Lösung 4: Wir betrachten die Funktion $f : X \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, \frac{y}{x+y})$. Offensichtlich gilt $f(X) \subset (0,1)^2$. Wir zeigen nun, dass f auf dieser Menge sogar invertierbar ist. Sei dazu $(u,v) \in (0,1)^2$ gegeben und setze $f(x,y) = (u,v)$. Dann folgt aus $u = x + y$ und $v = \frac{y}{u}$ die Umkehrfunktion $y = uv$ und $x = u(1-v)$. Da sowohl f als auch die Umkehrfunktion differenzierbar sind ist $f : X \to (0,1)^2$ also ein Diffeomorphismus. Daher gilt

$$\int_X e^{\frac{y}{x+y}} d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 e^v \left| \det \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix} \right| dudv = \int_0^1 \int_0^1 e^v \left| u - uv + uv \right| dudv = \frac{e-1}{2}.$$

Aufgabe 5 (5+5 Punkte)**:** Gegeben sei

$$\int_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x\cos(1-x^2-y^2) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} d(x,y).$$

(a) Berechnen Sie das Integral direkt.

(b) Berechnen Sie das Integral mit dem Satz von Gauß.

Lösung 5: (a) Es gilt

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\} = \left\{(x,y) : y\in(-1,1), -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}\right\}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x\cos(1-x^2-y^2) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} d(x,y) \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \partial_x(x\cos(1-x^2-y^2))\,dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\cos(1-(1-y^2)-y^2) - (-\sqrt{1-y^2})\cos(1-(1-y^2)-y^2)\,dy \\
&= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\cos(0)\,dy \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(z)^2}\cos(z)\,dz \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z)^2\,dz = \pi.
\end{aligned}$$

Nach der Substitution $y=\sin(z)$ wurde verwendet, dass $\cos(z)\geq 0$ auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ gilt.

(b) Der Rand der Menge ist der Einheitskreis $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$, dessen Normale in einem Punkt (x,y) durch $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben ist. Demnach folgt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}
\int_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x\cos(1-x^2-y^2) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} d(x,y) &= \int_{x^2+y^2=1} \begin{pmatrix} x\cos(1-1) \\ 1+x^2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}d\sigma \\
&= \int_{x^2+y^2=1} \begin{pmatrix} x \\ 1+x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d\sigma \\
&= \int_{x^2+y^2=1} (x^2+(1+x^2)y)d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)(1+\cos(\varphi)^2)\right) d\varphi = \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (5+5 Punkte)**:** Eine Übung zu Polarkoordinaten:

(a) Zeigen Sie, dass für $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nur von $\|x\|$ abhängen, für die also ein $\tilde{f}$ mit $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$ existiert, folgendes gilt:

$$\Delta f\,(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{f}\,(r) \text{ für } r = \|x\|\,.$$

Lösung 6: (a) Hier muss man einen Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatensystemen schaffen, der die Abhängigkeit voneinander illustriert. Sei $u(x, y)$ eine Funktion in kartesischen Koordinaten und v die Darstellung in Polarkoordinaten. Das heißt $u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = v(r, \varphi)$. Die Darstellung in der anderen Richtung ist komplizierter, denn dann braucht man Fallunterscheidungen, wir wollen also hiermit arbeiten. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) v(r,\varphi) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\Big(u_x\cos(\varphi) + u_y\sin(\varphi)\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(u_x(-r\sin(\varphi)) + u_y r\cos(\varphi)\Big) \\
&= \frac{1}{r}\left(u_x\cos(\varphi) + u_y\sin(\varphi) + r(u_{xx}\cos(\varphi)^2 + u_{xy}\cos(\varphi)\sin(\varphi)) + r(u_{xy}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + u_{yy}\sin(\varphi)^2)\right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\Big(u_x(-r\cos(\varphi)) + u_y(-r\sin(\varphi)) + u_{xx}(-r\sin(\varphi))^2 + u_{xy}(-r\sin(\varphi))(r\cos(\varphi)) \\
&\qquad + u_{xy}(-r\sin(\varphi))(r\cos(\varphi)) + u_{yy}(r\cos(\varphi))^2\Big) \\
&= u_{xx} + u_{yy}
\end{aligned}$$

und damit ist dies gezeigt.

(b) Mit $\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\| = \frac{x_i}{\|x\|}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f}\,(\|x\|) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\tilde{f}'\,(\|x\|)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x\| - x_i\frac{x_i}{\|x\|}}{\|x\|^2}\tilde{f}'\,(\|x\|) + \frac{x_i^2}{\|x\|^2}\tilde{f}''\,(\|x\|) \\
&= \frac{1}{\|x\|}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{x_i^2}{\|x\|^2}\right)\tilde{f}'\,(\|x\|) + \frac{1}{\|x\|^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\|x\|^2}\ \tilde{f}''\,(\|x\|) \\
&= \frac{n-1}{\|x\|}\tilde{f}'\,(\|x\|) + \tilde{f}''\,(\|x\|) \\
&= \frac{1}{r^{n-1}}\left((n-1)r^{n-2}\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r) + r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r)\right) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7: (a) Zu welcher Differentialgleichung wird

$$u_{xx} - u_{yy} = f,$$

wenn die Substitution $s = x - y$, $t = x + y$ durchgeführt wird?

(b) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(x,y) = g(x-y) + h(x+y) \tag{2}$$

eine Lösung liefert zu

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich jede zweimal stetig differenzierbare Lösung von (3) wie in (2) schreiben lässt.

Lösung 7: (a) Man sieht, dass $s = x - y$ und $t = x + y$ äquivalent zu $x = \frac{t+s}{2}$ und $y = \frac{t-s}{2}$ ist. Wir definieren

$$\widetilde{u}(s,t) := u\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right),$$

also gilt auch $u(x,y) = \widetilde{u}(x-y, x+y)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,y) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \widetilde{u}(x-y,x+y) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \widetilde{u}(x-y,x+y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{u}_s(x-y,x+y) + \widetilde{u}_t(x-y,x+y)\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\widetilde{u}_s(x-y,x+y) + \widetilde{u}_t(x-y,x+y)\right) \\
&= \widetilde{u}_{ss}(x-y,x+y) + \widetilde{u}_{st}(x-y,x+y) + \widetilde{u}_{ts}(x-y,x+y) \\
&\quad + \widetilde{u}_{tt}(x-y,x+y) - (\widetilde{u}_{ss}(x-y,x+y) \\
&\quad - \widetilde{u}_{st}(x-y,x+y) - \widetilde{u}_{ts}(x-y,x+y) \\
&\quad + \widetilde{u}_{tt}(x-y,x+y)) \\
&= 4\widetilde{u}_{st}(x-y,x+y).
\end{aligned}$$

Wir finden also

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u}(s,t) = \frac{1}{4} f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{t-s}{2}\right) =: \widetilde{f}(s,t). \tag{4}$$

(b) Dann hat obiges $\tilde{u}$ die Gestalt $\tilde{u}(s,t) = g(s) + h(t)$. Man sieht durch Ableiten sofort, dass die Funktion die Gleichung $\partial_s \partial_t \tilde{u}(s,t) = 0$ löst. Wenn man $f \equiv 0$ in (4) setzt, so ist nach Teil (a) u also eine Lösung von $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

(c) Um zu zeigen, dass jede Lösung diese Form hat, kann man wie folgt vorgehen.

Sei u eine Lösung von (3), dann löst $\tilde{u}$ die Gleichung $\partial_s \partial_t \tilde{u}(s,t) = 0$. Daraus folgt nach Integration, dass $\partial_t \tilde{u}(s,t) = \tilde{h}(t)$ und daraus folgt, dass

$$\tilde{u}(s,t) = \int_0^t \tilde{h}(\tilde{t})d\tilde{t} + g(s) = h(t) + g(s)\,.$$

Man erhält also, dass

$$u(x,y) = u\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) = \tilde{u}(s,t) = h(t) + g(s) = g(x-y) + h(x+y).$$