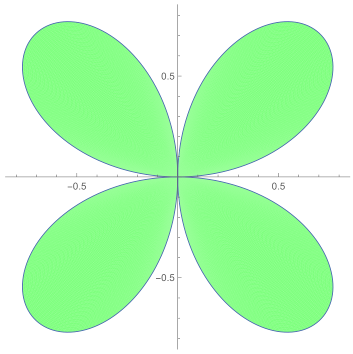
Prof. Dr. Guido Sweers
Henrik Schließauf, M.Sc. **SoSe 2021**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 3

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als **gut lesbares** eingescanntes/abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Abgabeschluss ist am Montag, 03.05.2021, um 14 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung „[Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf“.



Aufgabe 1: Das vierblättrige Kleeblatt wird durch

$$\Omega = \left\{ r\sin(2\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} ; r \in [0,1] \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

beschrieben. Bestimmen Sie den Flächeninhalt von Ω.

Lösung 1: Die Funktion

$$F : (0,1) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \left\{ r\sin(2\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} ; r \in (0,1) \text{ und } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

definiert durch

$$F(r,\varphi) := (r\sin(2\varphi)\cos(\varphi), r\sin(2\varphi)\sin(\varphi))$$

ist ein Diffeomorphismus, der $(0,1) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ auf eines der vier Blätter (rechts oben) bijektiv abbildet. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \det(\nabla F(r,\varphi)) &= \det \begin{pmatrix} \sin(2\varphi)\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\sin(2\varphi) + 2r\cos(\varphi)\cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi)\sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\sin(2\varphi) + 2r\sin(\varphi)\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r\sin^2(2\varphi). \end{aligned}$$

Mit dem Transformationssatz erhält man:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_\Omega 1 d(x,y) = 4\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left| r\sin^2(2\varphi) \right| d\varphi\, dr = 4\int_0^1 \int_0^{\pi/2} r\sin^2(2\varphi)\, d\varphi\, dr \\ &= 4\int_0^1 r dr \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi) d\varphi = 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(2)

a) $\eta = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\, dz$

$$\leadsto \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{\eta} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \overset{\substack{y=\frac{x}{\varepsilon} \\ \text{Trafosatz}}}{=} \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy = 1$$

b) $$\partial_{x_i} u_\varepsilon(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{u_\varepsilon(x+\delta x_i) - u_\varepsilon(x)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \underbrace{\frac{\psi_\varepsilon(x+\delta x_i - y) - \psi_\varepsilon(x-y)}{\delta}}_{\to\, \partial_{x_i} \psi_\varepsilon(x-y) \text{ pktw.}} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \partial_{x_i} \psi_\varepsilon(x-y)\, dy$$

da $\| u(y)| \, \|\nabla \psi_\varepsilon\|_\infty$ integrierbare Majorante ist

$\partial_{x_i} u_\varepsilon$ stetig da $$|\partial_{x_i} u_\varepsilon(x) - \partial_{x_i} u_\varepsilon(\hat{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)| \underbrace{|\partial_{x_i} \psi_\varepsilon(x-y) - \partial_{x_i} \psi_\varepsilon(\hat{x}-y)|}_{\leq \|\nabla \psi_\varepsilon\|_\infty |x-\hat{x}|} d$$

$$\leq \|u\|_{L^1} \|\nabla \psi\|_\infty |x-\hat{x}| \to 0 \text{ glm. für } |x-\hat{x}| \to 0$$

c) Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ bel.

u stetig mit komp. Träger $\Rightarrow$ u glm. stetig

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ s.d. $|u(x)-u(y)| < \tilde{\varepsilon}$ falls $|x-y| < \delta$

sei $0 \leq \varepsilon < \delta$

$$\leadsto |u_\varepsilon(x) - u(x)| \overset{a)}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\psi_\varepsilon(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \psi_\varepsilon(z)\, dz \right|$$

$$\overset{\substack{\text{Trafosatz} \\ y = x-z}}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x-z)\psi_\varepsilon(z) - u(x)\psi_\varepsilon(z)\, dz \right|$$

$$\overset{\operatorname{supp}\psi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)}{\leq} \int_{B_\varepsilon(0)} |u(x-z) - u(x)|\, |\psi_\varepsilon(z)|\, dz \leq \tilde{\varepsilon}$$

③ Notation für $A \subset \mathbb{R}^n$: $\quad d(x,A) = \inf_{a \in A} |x-a|$

a) i) $$V_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\chi_{2\varepsilon}(y)\,\psi_\varepsilon(x-y)}_{\geq 0}\,dy = \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \psi_\varepsilon(x-y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y)\,dy = 1$$

ii) Sei $x \in \Omega_\varepsilon$, $x-y \in B_\varepsilon(0)$

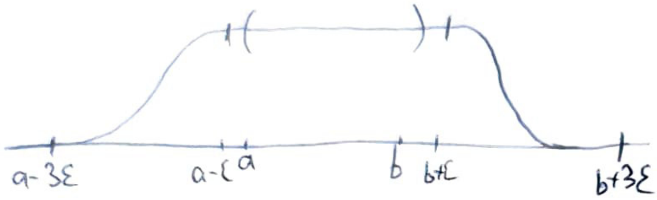
$\rightsquigarrow d(y,\Omega) \leq d(x,\Omega) + |x-y| < 2\varepsilon \quad \Rightarrow y \in \Omega_{2\varepsilon}$

$$\rightsquigarrow V_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{2\varepsilon}(y)\,\psi_\varepsilon(x-y)\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{supp}\psi_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon(0)}}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$$

iii) $v_\varepsilon \in C_0^\infty$ nach ②

Für $y \in \Omega_{2\varepsilon}$ und $x-y \in \overline{B_\varepsilon(0)} = \operatorname{supp}\psi_\varepsilon$ gilt

$d(x,\Omega) \leq d(y,\Omega) + |x-y| < 3\varepsilon \quad \Rightarrow$ Beh.



b) $d(x,\mathbb{R}^n\setminus\Omega)$ ist eine (Lipschitz)-stetige Funktion

K kompakt $\Rightarrow \exists x_K \in K: \inf_{x\in K} d(x,\mathbb{R}^n\setminus\Omega) = d(x_K,\mathbb{R}^n\setminus\Omega) =: d(K,\mathbb{R}^n\setminus\Omega)$

Sei $\varepsilon = \dfrac{d(K,\mathbb{R}^n\setminus\Omega)}{4}$

$\overset{a)}{\rightsquigarrow} \exists\, v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $v_\varepsilon = 1$ auf K_ε und $\operatorname{supp} v_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon}$

(4) a) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $M>0$: $\operatorname{supp}\varphi \subset [-M,M]$.

Für $u \in C^4(\mathbb{R})$ gilt mit part. Integr.

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}} u'' \varphi'' dx = \underbrace{u''\varphi' \Big|_{-M}^{M}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}^n} u''' \varphi' dx = \underbrace{-u'''\varphi \Big|_{-M}^{M}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}^n} u'''' \varphi \, dx$$

$\rightsquigarrow u \in C^4$ ~~erfüllt (*)~~ schwache Lsg. genau dann wenn $u'''' = f$

b) $u''''(x) = e^{-|x|}$ Für stetige Fkt. gilt der Hauptsatz der Integralrechnung

$$\Rightarrow u'''(x) = \int_0^x e^{-|s|} ds + C_1 = \begin{cases} -e^{-x} + 1 + C_1, & x \geq 0 \\ e^{x} - 1 + C_1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u''(x) = \int_0^x u'''(s) ds + C_2 = e^{-|x|} + |x| + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow u'(x) = \int_0^x u''(s) ds + C_3 = \begin{cases} -e^{-x} + 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3, & x \geq 0 \\ e^{x} - 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{-|x|} + |x| + \frac{1}{6}|x|^3 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

c) Man sieht, dass $\int_0^x \operatorname{sign}(s) ds = |x|$ eine stetige Fkt. ist.

Sei $u'''(x) = |x| + C_1 \Rightarrow u''(x) = \begin{cases} x^2 + C_1 x + C_2, & x \geq 0 \\ -x^2 + C_1 x + C_2, & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \dots \quad u(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x^4 + \tilde{C}_1 x^3 + \tilde{C}_2 x^2 + \tilde{C}_3 x + \tilde{C}_4, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{24}x^4 + \tilde{C}_1 x^3 + \tilde{C}_2 x^2 + \tilde{C}_3 x + \tilde{C}_4, & x < 0 \end{cases}$$

weiter gilt $\int u'' \varphi'' dx = -\int u''' \varphi' dx = -\int |x| \varphi' dx \underset{\text{Vorl.}}{=} \int \operatorname{sign}(x) \varphi(x) dx$

$\Rightarrow u \in C^3$ ist schwache Lsg.

d) Ähnlich zu c) findet man mit

$u(x) = \frac{16}{105}|x|^{7/2} + \dots$ eine drei mal stetig-diff.bare schwache Lsg.

5

$$\int_\Omega e^{-|x|^2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} e^{-|x|^2} \nabla u(x) \cdot \vec{n}\, \underbrace{v(x)}_{=0 \text{ auf } \partial\Omega}\, d\sigma_x - \int_\Omega \nabla \cdot \left(e^{-|x|^2} \nabla u(x)\right) v(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^n e^{-|x|^2} \left(2 x_i\, \partial_{x_i} u(x) - \partial_{x_i x_i} u(x)\right) v(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega e^{-|x|^2} \left(2 x \cdot \nabla u(x) - \Delta u(x)\right) v(x)\, dx$$

$\rightsquigarrow$ $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^0_0(\overline{\Omega})$ löst

$$\begin{cases} e^{-|x|^2}\left(2x \cdot \nabla u(x) - \Delta u(x)\right) = f(x), & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

(6) a) $u_{xy}(x,y) = 0$

$$u_y(x,y) - u_y(0,y) = \int_0^x u_{xy}(s,y)\,ds = 0$$

$$\rightsquigarrow u_y(x,y) = u_y(0,y) = \psi'(y)$$

$$u(x,y) - u(x,0) = \int_0^y u_y(x,t)\,dt = \int_0^y \psi'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow u(x,y) = u(x,0) + \psi(y) - \psi(0)$$

$$= \eta(x) + \psi(y) - \psi(0)$$

b) $$\int_{[0,1]^2} u_x(x,y)\,\varphi_y(x,y)\,d(x,y) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0,1]^2)$$

oder

$$\int_{[0,1]^2} u_y(x,y)\,\varphi_x(x,y)\,d(x,y) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0,1]^2)$$