Aufg. 1

a) Mit dem Hinweis ergibt sich für Testfunktionen φ mit Null nicht im Träger:

$$\int_{-1}^{1} \left((x\,u(x))'' - 2u'(x) + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \right) \varphi(x)\,dx = 0$$

$$\rightsquigarrow (x\,u)'' - 2u' + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} = 0 \qquad \text{für } x \neq 0$$

$$\Rightarrow x\,u''(x) + \cancel{2u'} - \cancel{2u'} + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} = 0 \qquad \text{für } x \neq 0$$

b)

$$u''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{|x|}} = \begin{cases} \dfrac{-1}{4x^{3/2}} & , x > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{4(-x)^{3/2}} & , x < 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow u'(x) = \frac{1}{2}|x|^{-\frac{1}{2}} + C_1$$

$$\rightsquigarrow u(x) = \sqrt{|x|}\,\mathrm{sign}(x) + C_1 x + C_2$$

Das wollen wir nun überprüfen für $u(x) = \sqrt{|x|}\,\mathrm{sign}(x)$:

$$\int_{-1}^{1} \Big(\underbrace{|x|^{3/2}}_{\in C^1} \varphi''(x) + 2\sqrt{|x|}\,\mathrm{sgn}(x)\,\varphi'(x) + \frac{1}{4\sqrt{|x|}}\varphi(x) \Big)\,dx$$

$$= \underbrace{|x|^{\frac{3}{2}}\varphi'(x)\Big|_{x=-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\sqrt{|x|}\,\mathrm{sgn}(x)\,\varphi' + \frac{1}{4\sqrt{|x|}}\varphi \right) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \left(\frac{-1}{2}\sqrt{-x}\,\varphi'(x) + \frac{1}{4\sqrt{-x}}\varphi(x) \right) dx + \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\delta}^{1} \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\varphi' + \frac{1}{4\sqrt{x}}\varphi \right) dx$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \uparrow 0} -\frac{1}{2}\sqrt{-x}\,\varphi(x)\Big|_{x=-1}^{\varepsilon}}_{=0} + \underbrace{\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2}\sqrt{x}\,\varphi(x)\Big|_{x=\delta}^{1}}_{=0} = 0$$

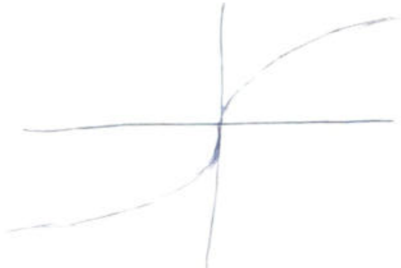
Weiter gilt für $\tilde{u}(x) = c_1 x + c_2$:

$$\int_{-1}^{1} \left(x\hat{u}(x)\varphi''(x) + 2\hat{u}(x)\varphi'(x) \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left((c_1x^2 + c_2x)\varphi'' + (2c_1x + c_2)\varphi' \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2c_1\varphi(x) - 2c_1\varphi(x) \right) dx = 0$$

c) Nein, denn $x \mapsto \sqrt{|x|}\,\mathrm{sgn}(x)$ ist in 0 nicht differenzierbar



d) Ja, es gilt $u' = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$ für $x \neq 0$ und somit

$$\int_{-1}^{1} \left(-x\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\varphi' - \frac{1}{2\sqrt{|x|}}\varphi + \frac{1}{4\sqrt{|x|}}\varphi \right) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \nearrow 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{2}\sqrt{|x|}\,\varphi'(x) - \frac{1}{4\sqrt{|x|}}\varphi(x) \right) dx + \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\delta}^{1} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\varphi'(x) - \frac{1}{4\sqrt{x}}\varphi(x) \right) dx$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \nearrow 0} \frac{1}{2}\sqrt{|x|}\,\varphi(x) \Big|_{-1}^{\varepsilon}}_{=0} + \underbrace{\lim_{\delta \searrow 0} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\varphi(x) \right) \Big|_{x=\delta}^{1}}_{=0} = 0$$

Aufg. 2 Ω offen, zsh., u harmonisch auf Ω

Sei $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = 0$

Es reicht zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_1 \in B_\varepsilon(x_0)$ existiert, s.d. $x_1 \neq x_0$ und $u(x_1) = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel., Da Ω offen ist $\exists \delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ s.d. $\overline{B_\delta(x_0)} \subset \Omega$.

Da u harmonisch ist, gilt die Mittelwerteigenschaft:

$$0 = \int_{\partial B_\delta(x_0)} (u(x) - \underbrace{u(x_0)}_{=0}) \, d\sigma = \int_0^{2\pi} u(\delta \cos\varphi, \delta \sin\varphi) \, d\varphi \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Entweder $u \equiv 0$ auf $\partial B_\delta(x_0)$ oder $\exists \varphi_1 \in [0, 2\pi)$ s.d. $u(\delta\cos\varphi_1, \delta\sin\varphi_1) \neq 0$

Sei u an dieser Stelle ohne Einschränkung positiv.
Dann muss wegen $(*)$ ein $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$ existieren mit $u(\delta\cos\varphi_2, \delta\sin\varphi_2) < 0$

Da $[0, 2\pi) \ni \varphi \mapsto u(\delta\cos\varphi, \delta\sin\varphi)$ stetig ist, muss nach dem Zwischenwertsatz ein φ_0 zwischen φ_1 & φ_2 existieren s.d. $u(\delta\cos\varphi_0, \delta\sin\varphi_0) = 0$

Insgesamt existiert immer mind. ein $x_1 \in \partial B_\delta(x_0) \subset B_\varepsilon(x_0)$ mit $u(x_1) = 0$. $\square$

Aufg. 3

a) $\int_\Omega T(x,t)\, T_t(x,t)\, dx$

$= \int_\Omega T(x,t)\left(\Delta_x T(x,t) - T(x,t)^3\right) dx$

$= \underbrace{\int_{\partial\Omega} T(x,t) \frac{\partial}{\partial n} T(x,t)\, d\sigma_x}_{=0} - \int_\Omega \left(|\nabla T(x,t)|^2 + T(x,t)^4\right) dx$

$\leq - \int_\Omega |\nabla_x T(x,t)|^2\, dx$

b) $\frac{\partial}{\partial t} E(t) = 2 \int_\Omega T(x,t)\, T_t(x,t)\, dx \leq -2 \int_\Omega |\nabla_x T(x,t)|^2 dx \leq 0$

$\Rightarrow \quad E(t) - E(0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} E(s)\, ds \leq 0.$

c) $t \mapsto E(t)$ ist fallend und nach unten beschränkt. Dann gibt es einen Limes.

d) Aus $T(\cdot,t) \xrightarrow{L^2} T_\infty$ folgt $\lim_{t\to\infty} E(t) = \int_\Omega T_\infty(x)^2 dx := E_\infty$

Angenommen $E_\infty > 0$, dann ex. $\tau > 0$ s.d. $E(t) > \frac{E_\infty}{2} > 0 \quad \forall t \geq \tau$

Weiter gilt nach Hölder

$E(t) = \int_\Omega T^2(x,t) \cdot 1\, dx \leq \left(\int_\Omega T^4(x,t)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}$

Insb. folgt $\frac{\partial}{\partial t} E(t) \leq -2 \int_\Omega T(x,t)^4 dx \leq - \underbrace{C E_\infty^2}_{>0}$ für $t \geq \tau$

und somit $E(t) \leq E(\tau) - C E_\infty^2 (t-\tau) \to -\infty$ für $t \to \infty$ $\lightning$

$\Rightarrow E_\infty = 0 \Rightarrow T_\infty = 0$ f.ü.

Aufg. 4

a) Da u radialsymm. ist existierd eine Fkt.

$U:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ s.d. $u(x,y)=U\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$\Rightarrow \nabla u(x,y)=\frac{U_r\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

In Polarkoord.: $\nabla u = U_r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

Daraus folgt $|\nabla u|^2=U_r^2$ und auch $\nabla u\cdot\nabla\tilde{u}=U_r\tilde{U}_r$.

Nach Aufg. 2 von Blatt 2 gilt zudem $\Delta u = U_{rr}+\frac{1}{r}U_r$

$$\rightsquigarrow \nabla\cdot\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}=\frac{\Delta u}{\sqrt{1+U_r^2}}-\frac{1}{2}\frac{\nabla u\cdot\nabla(U_r^2)}{(1+U_r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{U_{rr}+\frac{1}{r}U_r}{\sqrt{1+U_r^2}}-\frac{U_r^2\,U_{rr}}{(1+U_r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_r}{\sqrt{1+U_r^2}}\right)+\frac{1}{r}\frac{U_r}{\sqrt{1+U_r^2}}$$

b) $$V'(r)+\frac{1}{r}V(r)=0 \Rightarrow V(r)=\frac{c}{r}$$

$$\frac{U'(r)}{\sqrt{1+U'(r)^2}}=\frac{c}{r}\Rightarrow (U'(r))^2=(1+U'(r)^2)\frac{c^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow (U'(r))^2=\frac{c^2/r^2}{1-c^2/r^2}\Rightarrow U'(r)=\pm\frac{c}{\sqrt{r^2-c^2}}$$

$U(r)=\pm\operatorname{arccosh}(r/c)c+c_2=\pm c\log\left(r/c+\sqrt{(r/c)^2-1}\right)+c_2$

nur + ist passend da $U(2)=h>U(1)=0$

also $\pm c>0$

$$U(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c\log\left(1/c + \sqrt{(1/c)^2 - 1}\right)$$

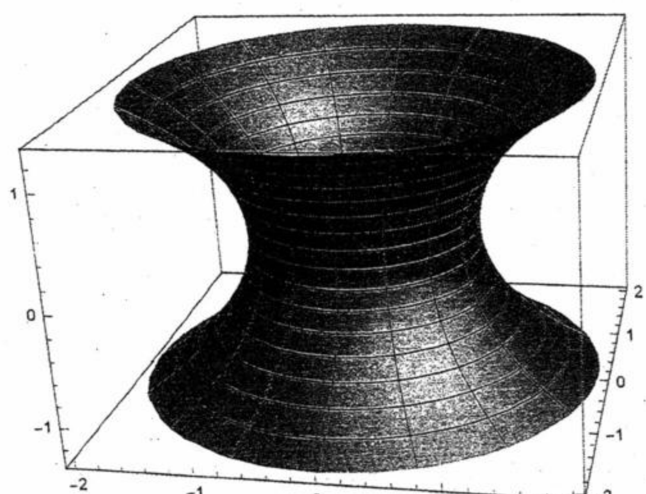
$$U(r) = c\log\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - c^2}}{1 + \sqrt{1 - c^2}}\right) \quad \text{mit} \quad c < 1$$

$$U(2) = h = c\log\left(\frac{2 + \sqrt{4 - c^2}}{1 + \sqrt{1 - c^2}}\right)$$

$$= c\log 2 + c\underbrace{\log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (c/2)^2}}{1 + \sqrt{1 - c^2}}\right)}_{\text{wachsend als Funktion von } c \in [0,1]}$$

Maximal für $c = 1$ bedeutet

$$h \le \log\left(2 + \sqrt{3}\right)$$



$$U(r) = \log\left(r + \sqrt{r^2 - 1}\right)$$

$$U(r) = -\log\left(r + \sqrt{r^2 - 1}\right)$$

Aufg. 5 $\quad \Omega = \{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi) : 0<r<1,\ 0<|\varphi|<\frac{3}{4}\pi \}$

$$u(r,\varphi) = \left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}}\right)\sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi + \frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

a) Nach Aufg. 6, Blatt 2 gilt

$$-\Delta u = -\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\partial_r\left(r\left(-\frac{2}{3}r^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}r^{-\frac{1}{3}}\right)\sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi+\frac{3}{4}\pi\right)\right)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{4}{9}u$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{r}\partial_r\left(r^{-\frac{2}{3}} + r^{\frac{2}{3}}\right)\sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi+\frac{3}{4}\pi\right)\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{4}{9}u$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{1}{r}\left(r^{-\frac{5}{3}} - r^{-\frac{1}{3}}\right)\sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi+\frac{3}{4}\pi\right)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{4}{9}u = 0$$

b) Für $\varphi \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ fix gilt

$$\lim_{r\nearrow 1} u(r,\varphi) = \sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi+\frac{3}{4}\pi\right)\right)\lim_{r\nearrow 1}\left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}}\right) = 0$$

Für $r\in(0,1)$ fix gilt

$$\lim_{\varphi\searrow -\frac{3}{4}\pi} u(r,\varphi) = \left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}}\right)\sin(0) = 0 \qquad \lim_{\varphi\nearrow\frac{3}{4}\pi} u(r,\varphi) = \left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}}\right)\sin(\pi) = 0$$

c) Auch hier nimmt die Funktion kein Extremum im Inneren an.

Es gilt $u(r,\varphi) = \underbrace{\left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}}\right)}_{>0}\sin\Big(\underbrace{\frac{2}{3}\left(\varphi+\frac{3}{4}\pi\right)}_{\in(0,\pi)}\Big) > 0$ in Ω

Nach b) gilt $\inf_{x\in\Omega} u(x) = u\big|_{\partial\Omega\setminus\{0\}} = 0$

Für $\varphi\in\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ gilt

$$\lim_{r\to 0} u(r,\varphi) = \underbrace{\sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi+\frac{3}{4}\pi\right)\right)}_{>0}\lim_{r\searrow 0}\left(r^{-\frac{2}{3}} - r^{\frac{2}{3}}\right) = \infty$$